

THESES

présentées à la

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE NANCY

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

par

Michel LALANNE

Ingénieur E.N.S.E.M.

Chargé d'Enseignement

**PREMIERE THÈSE : CONTRIBUTION AU CALCUL DES PULSATIONS NATURELLES
DES MILIEUX CONTINUS UNIDIMENSIONNELS.
APPLICATION AUX TREILLIS.**

**DEUXIÈME THÈSE : PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ :
LE FLAMBAGE DES COQUES CYLINDRIQUES CIRCULAIRES
SOUS CHARGE AXIALE.**

Soutenues publiquement le

1967

devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

Président : M. J. CAPELLE

Examineurs : MM. R. MAZET

R. GUILLIEN

M. BONVALET

THESES

présentées à la

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE NANCY

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

par

Michel LALANNE

Ingénieur E.N.S.E.M.
Chargé d'Enseignement

**PREMIERE THÈSE : CONTRIBUTION AU CALCUL DES PULSATIONS NATURELLES
DES MILIEUX CONTINUS UNIDIMENSIONNELS.
APPLICATION AUX TREILLIS.**

**DEUXIÈME THÈSE : PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ :
LE FLAMBAGE DES COQUES CYLINDRIQUES CIRCULAIRES
SOUS CHARGE AXIALE.**

Soutenues publiquement le

devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

Président : M. J. CAPELLE

Examineurs : MM. R. MAZET
R. GUILLIEN
M. BONVALET

THESIS

FACULTY OF SCIENCES OF THE UNIVERSITY OF LEIDEN

IN GRADE OF DOCTOR IN SCIENCE PHYSICS

WILHELM LANGE



PROPOSED BY : COMMISSIONER IN CHIEF OF THE PHYSICAL MATHEMATICAL
DEPARTMENT OF THE UNIVERSITY OF LEIDEN
APPROVED BY : THE FACULTY

THE FACULTY OF SCIENCES OF THE UNIVERSITY OF LEIDEN
PROPOSED BY : THE FACULTY OF SCIENCES OF THE UNIVERSITY OF LEIDEN
APPROVED BY : THE FACULTY OF SCIENCES OF THE UNIVERSITY OF LEIDEN

THE FACULTY OF SCIENCES OF THE UNIVERSITY OF LEIDEN

THE FACULTY OF SCIENCES OF THE UNIVERSITY OF LEIDEN

Doyen : M. AUBRY

Assesseur : M. GAY

Doyens Honoraires : MM. CORNUBERT - DELSARTE - ROUBAULT.

Professeurs Honoraires : MM. RAYBAUD - LAFFITTE - LERAY - JULY - LAPORTE - EICHHORN - GODEMENT - DUBREUIL - L. SCHWARTZ - DIEUDONNE - DE MALLEMANN - LONGCHAMBON - LETORT - DODE - GAUTHIER - GOUDET - OLMER - CORNUBERT - CHAPELLE - GUERIN - WAHL

Maîtres de Conférences Honoraires : MM. LIEHNART - PIERRET -

Professeurs

MM. DELSARTE	Analyse Supérieure
ROUBAULT	Géologie
CAPELLE	Mécanique Rationnelle
VEILLET	Biologie Animale
BARRIOL	Chimie Théorique
BIZETTE	Physique
GUILLIEN	Electronique
GIBERT	Chimie Physique
LEGRAS	Mécanique Rationnelle
BOLFA	Minéralogie & Cristallographie
NICLAUSE	Chimie
FAIVRE	Physique appliquée
AUBRY	Chimie Minérale
COPPENS	Radiogéologie
DUVAL	Chimie
FRULHING	Physique
HILLY	Géologie
LE GOFF	Génie Chimique
SUHNER	Physique Expérimentale
CHAPON	Chimie Biologique
HEROLD	Chimie Minérale Industrielle
SCHWARTZ B.	Exploitation Minière
* MALAPRADE	Chimie
MANGENOT	Botanique
GAYET	Physiologie
BONVALET	Mécanique appliquée
HADNI	Physique
* BASTICK	Chimie
DUCHAUFOUR	Pédologie
GARNIER	Agronomie
NEEL	Chimie Organique Industrielle
BERNARD	Géologie appliquée
* CHAMPIER	Physique
* GAY	Chimie biologique
* STEPHAN	Zoologie
* CONDE	Zoologie
* WERNER	Botanique
EYMARD	Calcul Différentiel et intégral

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555020_0005

LEVISALLES	Chimie Organique
Mme HERVE	Méthodes Mathématiques de la physique
* GOSSE	Mécanique Physique
FELDEN	Physique
* DAVOINE	Physique (ENSMIM)
N.....	Chimie Biologique

ANNEE SCOLAIRE 1966 - 1967

- * Professeur titulaire à titre personnel.

Maîtres de Conférences

Mme BASTICK	Chimie M.P.C. (Epinal)
MM. GUDEFIN	Physique
ROCCI	Géologie
VUILLAUME	Psychophysiologie
FRENTZ	Biologie Animale
HORN	Physique propédeutique
LAFON	Physique (I.S.I.N.)
MARI	Chimie (I.S.I.N.)
AUROUZE	Géologie
DEVIOT	Physique du solide
FLECHON	Physique M.P.C.
Mlle HUET	Mathématiques S.P.C.N. (en disponibilité)
VIGNES	Métallurgie
BALESDENT	Thermodynamique chimique appliquée
BLAZY	Minéralogie appliquée (E.N.S.G.)
JANOT	Physique M.P.C. (Epinal)
JACQUIN	Pédologie et chimie agricole
MAINARD	Physique M.G.P.
CACHAN	Entomologie appliquée (E.N.S.A.)
MARTIN	Chimie M.P.C.
PAULMIER	Mécanique expérimentale
PROTAS	Minéralogie
COURTILLOT	Mécanique des Fluides
JOZEFOWICZ	Physico-chimie
JURAIN	Géologie (S.P.C.N)
RIVAIL	Chimie appliquée (C.U.C.E.S.)
VILLERMAUX	Génie Chimique
METCHE	Biochimie appliquée (Brasserie)
N...	Probabilités et statistiques
N...	Mécanique (I.S.I.N.)
N...	Mathématiques
N...	Mathématiques M.P.C.
N...	Mathématiques S.P.C.N.
N...	Mathématiques appliquées
N...	Mécanique des Fluides (I.S.I.N.)
N...	Physiologie animale
N...	Mathématiques M.P.

Monsieur le Professeur BONVALET, Directeur de l'Institut des Sciences de l'Ingénieur, a dirigé ce travail et soutenu nos efforts de sa constante et efficace sollicitude. Qu'il trouve ici l'expression de toute notre gratitude et de notre affectueux respect.

Monsieur le Professeur HAZET, Membre Correspondant de l'Institut, Directeur Scientifique à l'ONERA, a bien voulu s'intéresser à notre travail. Ses conseils et ses suggestions nous ont été des plus profitables. Il a bien voulu également nous proposer le deuxième sujet. Nous tenons à l'assurer de l'expression de notre très respectueuse reconnaissance.

Monsieur le Recteur CAPELLE nous a fait l'honneur d'accepter la présidence de notre Jury. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de nos plus respectueux remerciements.

Nous remercions également très vivement Monsieur le Professeur GUILLIEN, d'avoir bien voulu faire partie de notre Jury.

La partie expérimentale a été réalisée dans les ateliers de l'Institut des Sciences de l'Ingénieur. Monsieur POIRSON, Directeur Technique et ses collaborateurs, en particulier Messieurs LOMBARD et CHAMEROI, nous ont apporté inlassablement le concours de leur expérience. Les programmes de calcul sur ordinateur doivent beaucoup au dévouement et à la compétence de Monsieur LEPEIGNEUX. Nous les en remercions bien vivement.

AVANT PROPOS

Les développements de l'aéronautique et de l'astronautique ont fait surgir une multitude de problèmes intéressant les vibrations des solides de toutes formes. Les oscillations des voilures où intervenaient des phénomènes de flexion et de torsion, éventuellement compliqués par des effets de couplage aérodynamique ont été particulièrement étudiées. C'est pourquoi on assiste actuellement à de nombreuses recherches sur la dynamique des verges, orientées vers deux directions principales. Dans le premier cas, les chercheurs s'attachent à déterminer une solution rigoureuse pour le calcul des pulsations naturelles. Mais cette attitude attrayante de prime abord, a pour rançon de ne pouvoir s'évader de formes géométriques simples. Dans le second cas, c'est la recherche d'une méthode d'approximation qui prévaut, reposant très souvent sur l'élaboration d'un modèle mathématique. Le succès de ces derniers travaux se mesure, en fin de compte, à l'écart de leurs résultats avec les vérifications expérimentales et à leur commodité de mise en oeuvre.

Nous nous sommes efforcés de développer à notre tour une méthode de détermination des pulsations naturelles. En application, nous avons traité certains problèmes relatifs aux treillis. Les travaux de HOLZER (1) et MYKLESTADT (2) ont constitué notre point de départ. Il est bon de signaler que ceux-ci ont été étendus par W. BARROIS (3) à des exemples choisis dans des disciplines diverses. Afin d'évaluer la précision de nos calculs ultérieurs, nous avons commencé par déterminer des solutions précises dans certains cas d'espèces. Nous nous sommes efforcés ensuite de recouper ces premiers résultats avec ceux de notre méthode.

L'intelligibilité du texte qui va suivre exige que soient posées un certain nombre de définitions auxquelles nous nous réfèrerons. Cette attitude est conditionnée par la multiplicité des publications en dynamique des structures où un accord des auteurs sur la terminologie n'est pas encore apparu.

Considérons un corps prismatique non déformé et faisons choix d'une section droite de référence S . Nous admettrons en première hypothèse que S sera entraînée dans une déformation quelconque, mais ne perdra pas sa planéité.

Envisageons maintenant les deux parties du corps prismatique séparées par S et supposons que le corps soit alors entraîné dans une déformation. Si nous voulons ne considérer que la seule partie de gauche et faire abstraction de l'existence de la partie de droite, il faut alors imaginer qu'un système de forces est appliqué à la partie de gauche au niveau de S . Ce sera précisément l'objet de nos préoccupations que de mettre en évidence les éléments de réduction de ce système de forces.

Dans les théories classiques, on a l'habitude de ramener les éléments de réduction d'un torseur à une force et à un couple. Dans ce travail, des considérations d'opportunité nous amèneront, selon les cas traités, à construire la dynamique de notre système, à l'aide de quatre ou six grandeurs. Il est bien évident que nous introduisons ainsi des paramètres surabondants mais cela est sans inconvénient par le fait que nous connaissons les relations de dépendance qui existent entre les grandeurs retenues.

Référons-nous maintenant à la figure 1 et considérons un élément infinitésimal de surface $d\sigma$ centré en M, sur lequel s'applique une force F_i . Cette force admet une composante T_i dans le plan de la section. Ce phénomène se répétant pour tous les points de S, la sommation des composantes normales donnera lieu à une résultante N et les composantes tangentes à une résultante T. N reçoit le nom d'effort normal et T celui d'effort tranchant. Les moments résultants de ces forces, évalués au centre d'inertie G de la section, sont alors connus sous le nom de moment de flexion et de moment de torsion. Le premier est dans le plan de S, le second lui est perpendiculaire.

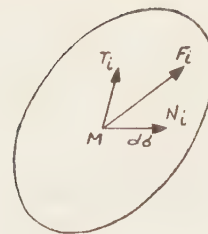


figure 1

On appelle communément axe élastique le lieu des points par rapport auxquels le moment de torsion est nul. On voit que l'axe élastique n'est autre que le lieu des centres de cisaillement.

Ces questions ont été particulièrement discutées par TREFFTZ (4) et TIMOSHENKO (5).

Quoi qu'il en soit, ces définitions générales ne sont malheureusement pas assorties d'une exploitation commode et la détermination pratique de l'axe élastique repose surtout sur des procédés expérimentaux.

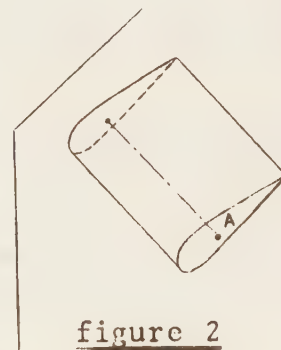


figure 2

On chargera la section extrême d'un poids P, appliqué en un point variable A. En général, ce mode de sollicitation provoque simultanément une flexion et une torsion, illustrées par la rotation de la section extrême.

On trouvera une position A telle que la torsion disparaîtra. L'axe élastique est alors dans le plan vertical passant par le lieu des points mis en évidence successivement dans chaque section (6).

Ayant fait choix d'un axe des x arbitraire horizontal, l'élongation verticale Y de chaque point de l'axe élastique apparaîtra comme une fonction de son abscisse et du temps $Y = Y(x, t)$.

Nous désignerons provisoirement alors par ψ l'angle que fait la tangente à l'axe élastique avec l'axe des x, c'est également une fonction de x et de t.

Dans le cas où existe une torsion, l'angle que fera un rayon de référence lié à une section d'abscisse x avec la verticale sera désigné par $\theta = \theta(x,t)$.

Enfin, les grandeurs déjà connues, T, effort tranchant, C, moment de flexion et Γ , moment de torsion, apparaîtront également comme des fonctions des abscisses et du temps.

Dans la suite de notre exposé, ce sont les grandeurs que nous qualifierons d'éléments de réduction du système dynamique des efforts.

L'introduction dans les calculs des conditions aux limites prendra une importance prépondérante dans la suite de notre exposé. Afin d'éviter de fastidieuses répétitions, il peut être avantageux de définir ici encore une terminologie restreinte. Nous parlerons de verge "encastrée-libre" par exemple lorsque l'extrémité droite demeurera libre. Rappelons que dans le cas où une extrémité est encastrée, la déflexion Y est au moins constante, nulle dans la plupart des cas. La traduction mathématique de cet état de fait est cependant insuffisante, il faut en outre tenir compte de la géométrie de l'axe élastique qui mérite quelques développements.

Les considérations qui précédaient avaient fait intervenir un angle ψ lié à des considérations incomplètement clarifiées.

On sait en effet que le moment fléchissant évalué en une section courante d'une verge est lié à la courbure locale par la formule bien connue :

$$\frac{C}{EI} = \frac{1}{R}$$

Le rayon de courbure est lui-même égal à l'inverse de la dérivée de ψ par rapport à l'abscisse. Les calculs qui vont suivre tiendront compte de la participation de l'effort tranchant à la flexion.

Afin de clarifier ce dernier point, considérons la tranche élémentaire du corps déformé et supposons pour simplifier qu'elle ait la forme d'un parallélépipède rectangle.

Soit ABCD la face à l'encastrement et $A_1B_1C_1D_1$ celle qui est exposée à l'effort tranchant T. Dans ces conditions, les résultats bien connus de la résistance des matériaux nous montrent que AA_1 est incliné sur l'hori-

zontale d'un angle $\alpha = - \frac{T}{SG}$
 où l'on désigne par G le module
 de rigidité et S la section
 droite.

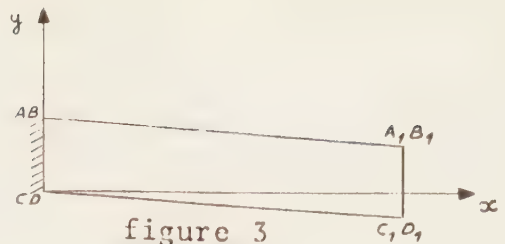


figure 3

En définitive, l'inclinaison de l'axe élastique sur l'axe des x sera systématiquement considérée comme la résultante d'un angle ψ lié au seul moment fléchissant et de l'angle α né de l'effort tranchant. La formule $\frac{C}{EI} = \frac{d\psi}{dx}$ est toujours valable compte tenu de la

définition précise que nous avons donné ψ , mais nous garderons en mémoire que :

$$\frac{dY}{dx} = \psi + \alpha$$

En ce qui concerne l'écriture d'une condition d'encastrement, il sera indispensable d'écrire $\psi = 0$ et non pas $\frac{dY}{dx} = 0$.

Il nous reste à signaler les cas respectifs d'une extrémité libre et d'une extrémité appuyée. Lorsque l'extrémité est libre, il nous suffira de mentionner la nullité de l'effort tranchant T et du moment fléchissant C. Pour le cas d'un appui, le moment fléchissant demeure nul, mais Y le devient également.

Les considérations qui précèdent suffiront à traiter tous les problèmes, mais les cas qui se posent réellement mettent surtout en évidence la configuration dite "encastrée-libre" au sens que nous avons précédemment défini. Ils se diversifient surtout par la nature des sollicitations mises en jeu qui pourraient être, par exemple, d'origine centrifuge.

Toutes les données numériques sont dans le système MKSA.

CHAPITRE 1

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES VERGES PRISMATIQUES

Le matériau est caractérisé par son module de Young E et son coefficient de Poisson σ . On peut en déduire les paramètres de Lamé dont l'un est connu sous le nom de module de rigidité ou de module de Coulomb G . La masse volumique ρ sera supposée constante, ainsi que les grandeurs précédentes.

Il nous a paru opportun d'établir les équations relatives aux déformations dynamiques des verges dans un cadre très général. En effet, les théories les plus courantes se limitent à des considérations dictées par la statique et les étendent généralement à la dynamique. Un exemple est figuré par la méthode de Rayleigh. C'est ainsi que sont laissés de côté les termes relatifs aux énergies de rotation lors des phénomènes de flexion et tel est notre propos d'en tenir le plus large compte. Il en est de même de la participation de l'effort tranchant généralement passée sous silence.

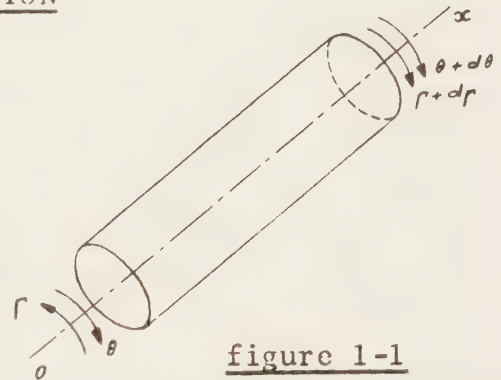
C'est dans cet esprit que nous rappellerons brièvement l'étude mathématique de la torsion qui n'est pas compliquée, des phénomènes secondaires précités et que nous nous étendrons sur celle de la flexion. A ce sujet, le calcul des pulsations naturelles de flexion a récemment été précisé dans le cas d'une verge "encastrée-libre"(7)

Les calculs propres à la flexion-torsion sont déjà compliqués même sans l'intervention des effets secondaires qui conduisent à des développements inextricables. Nous avons cependant traité un exemple numérique où l'équation caracté-

ristique conduisait à des racines ayant une physionomie particulière et où il a été possible de conduire notre investigation jusqu'à son terme, c'est-à-dire jusqu'à la valeur numérique des pulsations naturelles. La raison profonde de cette démarche était, outre d'avoir exploité complètement une méthode classique quelque peu laborieuse, d'en faire un objet de référence pour les résultats de méthodes originales qui seront proposées plus loin.

I - ETUDE MATHEMATIQUE DE LA TORSION

Considérons un élément dont la section frontale a pour abscisse x et la section terminale $x + dx$. Le fait de supposer l'élément en mouvement, équivaut à l'application d'un couple Γ sur la première et d'un couple $\Gamma + d\Gamma$ sur la seconde. Les angles de calage des faces extrêmes sont θ et $\theta + d\theta$.



Nous désignerons alors par I_θ le moment d'inertie de masse par unité de longueur du solide, relatif à l'axe élastique. Si J est le moment d'inertie polaire d'une section droite par rapport à la trace de l'axe élastique, le comportement de l'élément est caractérisé par les équations :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\Gamma}{G \cdot J} \quad (1-1)$$

$$I_\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \quad (1-2)$$

dont la première traduit le comportement élastique du matériau et la deuxième, le théorème du moment cinétique.

En définitive, l'élimination de Γ entre les deux équations précédentes conduit à l'équation différentielle :

$$\frac{G \cdot J}{I_\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (1-3)$$

fournissant les solutions de θ en fonction de x et de t .

En nous intéressant plus particulièrement aux mouvements stationnaires, c'est-à-dire tels que :

$$\theta = \theta(x) e^{j\omega t}$$

et en essayant cette forme de solution dans l'équation (1-3) il vient :

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} + \frac{I_\theta \cdot \omega^2}{GJ} \cdot \theta(x) = 0$$

La fonction $\theta(x)$ s'obtient immédiatement et a le développement :

$$\theta(x) = A_1 \sin \omega \sqrt{\frac{I_\theta}{GJ}} x + A_2 \cos \omega \sqrt{\frac{I_\theta}{GJ}} x \quad (1-4)$$

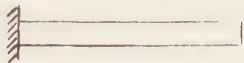
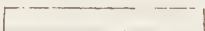
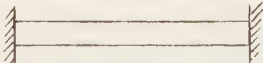
La relation (1-1) montre alors que :

$$\Gamma(x) = GJ \frac{d\theta(x)}{dx} = A_1 \omega \sqrt{I_\theta GJ} \cos \omega \sqrt{\frac{I_\theta}{GJ}} x - A_2 \omega \sqrt{I_\theta GJ} \sin \omega \sqrt{\frac{I_\theta}{GJ}} x \quad (1-5)$$

Les constantes d'intégration A_1 et A_2 sont alors homogènes à des amplitudes angulaires et devront être confrontées aux conditions aux limites, c'est ainsi que seront déterminées les pulsations naturelles.

Nous avons consigné dans un tableau les divers cas que l'on peut rencontrer, correspondant aux conditions aux limites possibles.

Nous avons désigné par L la longueur de la verge.

Encastrée libre	Libre libre	Encastrée encastrée
		
$x=0 \quad x=L$	$x=0 \quad x=L$	$x=0 \quad x=L$
$A_2 = 0$	$A_1 = 0$	$A_2 = 0$
$\omega_{\text{sec-1}} = (2n-1) \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{GJ}{I_\theta}}$ (1-6)	$\omega_{\text{sec-1}} = (n-1) \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{GJ}{I_\theta}}$ (1-7)	$\omega_{\text{sec-1}} = (n-1) \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{GJ}{I_\theta}}$ (1-8)
$n = 1, 2, 3, \dots$	$n = 1, 2, 3, \dots$	$n = 1, 2, 3, \dots$

II - ETUDE MATHEMATIQUE DE LA FLEXION

Nous nous proposons, ici encore, de déterminer les pulsations naturelles d'une verge vibrant en flexion. Pour cela, nous considérons un élément auquel s'applique, comme l'indique la figure, les efforts tranchants T et $T + dT$ et les couples C et $C + dC$. Ces grandeurs sont évidemment des grandeurs vectorielles.

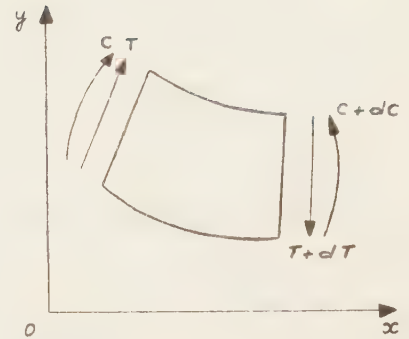


figure 1-2

Nous désignerons par I le moment d'inertie de l'aire d'une section S par rapport au support du moment de flexion réduit en G .

Nous référant aux définitions générales du paragraphe des "définitions générales et hypothèses de référence", nous aurons une première équation :

$$\frac{C}{EI} = \frac{d\psi}{dx} \quad (1-9)$$

dont il a déjà été question.

Une seconde relation exprimera que la pente de la tangente à l'axe élastique résulte de l'action du moment fléchissant et de celle de l'effort tranchant.

$$\frac{dY}{dx} = \psi + \alpha$$

Des études (8) et (9) montrent qu'en réalité il fallait écrire :

$$\alpha = - \frac{T}{KSG}$$

Ce résultat est dû à la correction apportée à l'hypothèse grossière de la Résistance des Matériaux, selon laquelle les efforts tranchants sont uniformément répartis dans la section droite.

K est un facteur de forme tenant compte de l'inégalité de la répartition des contraintes de cisaillement pour une section droite. Sa valeur est par exemple égale à

3/4 pour une section circulaire ou 2/3 pour une section rectangulaire. Il en résulte pour la pente de la tangente à la ligne élastique, la relation :

$$\frac{dY}{dx} = \psi - \frac{T}{KSG} \quad (1-10)$$

Appliquons à l'élément la formule fondamentale de la dynamique, il vient :

$$T - \left[T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right] = (\rho S dx) \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$$

soit en définitive :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = - \rho S \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \quad (1-11)$$

Le théorème du moment cinétique permet enfin d'écrire :

$$\frac{\partial C}{\partial x} dx - T dx = (\rho I dx) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1-12)$$

soit

$$\frac{\partial C}{\partial x} - T = \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1-12)$$

Nous disposons de quatre équations permettant de déterminer T, C, ψ , Y en fonction de x et de t et les pulsations naturelles correspondant aux divers types de conditions aux limites. Il est à noter que le terme $\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ qui est généralement négligé dans les théories simplifiées, représente le couple d'inertie dû à la rotation de l'élément. C'est aussi un effet secondaire que nous ne négligerons pas.

1) Absence d'effets secondaires

Postulons comme d'habitude de solutions du type stationnaire pour T, C, ψ , Y. Si on néglige l'influence des effets secondaires, les équations précédentes prennent la forme :

$$\frac{C}{EI} = \frac{d\psi}{dx} \quad (1-13) \quad \psi = \frac{dY}{dx} \quad (1-14)$$

$$T = \frac{dC}{dx} \quad (1-15)$$

$$\frac{dT}{dx} = \rho S \omega^2 Y \quad (1-16)$$

La détermination de Y dépendra de l'équation différentielle :

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} - \frac{\rho S \omega^2}{EI} \cdot Y = 0 \quad (1-17)$$

qui résulte de l'élimination de T, C, ψ , dans le système précédent.

La solution générale de (1-17) est alors

$$Y = A_1 \sin \sqrt{\beta} x + A_2 \cos \sqrt{\beta} x + A_3 \operatorname{sh} \sqrt{\beta} x + A_4 \operatorname{ch} \sqrt{\beta} x \quad (1-18)$$

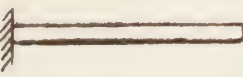
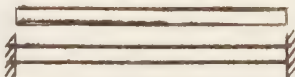
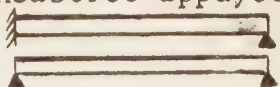
où sont introduites les constantes A_1, A_2, A_3, A_4 et où on a posé :

$$\beta^2 = \frac{\rho S \omega^2}{EI}$$

En ce qui concerne les conditions aux limites dont on sait qu'elles déterminent les pulsations naturelles, nous écrirons respectivement :

- pour une extrémité libre : $T = 0, C = 0$
- pour une extrémité encastree : $Y = 0, \psi = 0$
- pour une extrémité appuyée : $Y = 0, C = 0$

En résumé, les calculs simples afférents à chaque cas peuvent être résumés dans le tableau suivant :

Encastree-libre 	Appuyée-appuyée 	libre-libre  Encastree-encastree	Encastree-appuyée  libre-appuyée
$1 + \cos \sqrt{\beta} L \cdot \operatorname{ch} \sqrt{\beta} L = 0$	$\sin \sqrt{\beta} L = 0$	$1 - \cos \sqrt{\beta} L \cdot \operatorname{ch} \sqrt{\beta} L = 0$	$\operatorname{tg} \sqrt{\beta} L - \operatorname{th} \sqrt{\beta} L = 0$
3,5160 22,034 61,697 120,90 199,85	9,8696 39,478 88,826 157,91 246,74	22,373 61,672 120,90 199,85 298,55	15,418 49,964 104,24 178,26 272,03

Les lignes du tableau renseignent sur le type d'extrémité, les équations qui en découlent et les cinq premières racines correspondant à chaque relation (élevées au carré).

Les grandeurs que nous utiliserons par la suite sont :

$$Y = A_1 \sin \sqrt{\beta} x + A_2 \cos \sqrt{\beta} x + A_3 \operatorname{sh} \sqrt{\beta} x + A_4 \operatorname{ch} \sqrt{\beta} x$$

$$\psi = \frac{dY}{dx} = A_1 \sqrt{\beta} \cos \sqrt{\beta} x - A_2 \sqrt{\beta} \sin \sqrt{\beta} x + A_3 \sqrt{\beta} \operatorname{ch} \sqrt{\beta} x + A_4 \sqrt{\beta} \operatorname{sh} \sqrt{\beta} x$$

$$C = EI \frac{d\psi}{dx} = EI \beta (-A_1 \sin \sqrt{\beta} x - A_2 \cos \sqrt{\beta} x + A_3 \operatorname{sh} \sqrt{\beta} x + A_4 \operatorname{ch} \sqrt{\beta} x)$$

$$T = \frac{dC}{dx} = EI \beta \sqrt{\beta} (-A_1 \cos \sqrt{\beta} x + A_2 \sin \sqrt{\beta} x + A_3 \operatorname{ch} \sqrt{\beta} x + A_4 \operatorname{sh} \sqrt{\beta} x)$$

Nous pouvons exprimer maintenant les constantes A_2 , A_3 et A_4 en fonction de A_1 . Cette façon de procéder nous sera utile par la suite et présente l'intérêt de lier la solution générale $Y(x)$ à l'élongation maximale d'un point arbitrairement choisi.

A titre d'exemple, le cas d'une verge encastree en $x = L$ et libre en $x = 0$ conduit aux équations aux limites :

- pour $x=L$, $Y=0$, $A_1 \sin \sqrt{\beta} L + A_2 \cos \sqrt{\beta} L + A_3 \operatorname{sh} \sqrt{\beta} L + A_4 \operatorname{ch} \sqrt{\beta} L = 0$
- pour $x = 0$, $C = 0$, $A_2 - A_4 = 0$
- pour $x = 0$, $T = 0$, $A_1 - A_3 = 0$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} A_3 &= A_1 \\ A_4 &= A_2 \\ A_2 &= - \frac{\sin \sqrt{\beta} L + \operatorname{sh} \sqrt{\beta} L}{\cos \sqrt{\beta} L + \operatorname{ch} \sqrt{\beta} L} A_1 \end{aligned}$$

Dans le cas particulier de l'équation (1-18), si Y_0 est la déflexion maximale de l'extrémité libre :

$$Y = A_1 \left[\sin \sqrt{\beta} x + \operatorname{sh} \sqrt{\beta} x - \frac{\sin \sqrt{\beta} L + \operatorname{sh} \sqrt{\beta} L}{\cos \sqrt{\beta} L + \operatorname{ch} \sqrt{\beta} L} (\cos \sqrt{\beta} x + \operatorname{ch} \sqrt{\beta} x) \right]$$

avec :

$$A_1 = - \frac{Y_0}{2} \cdot \frac{\cos \sqrt{\beta} L + \operatorname{ch} \sqrt{\beta} L}{\sin \sqrt{\beta} L + \operatorname{sh} \sqrt{\beta} L}$$

Les expressions de T , C , ψ se déduisent de même aisément.

2) Intervention des effets secondaires

Cherchant systématiquement des solutions du type stationnaire, les équations (1-9), (1-10), (1-11) et (1-12) deviennent :

$$\frac{C}{EI} = \frac{d\psi}{dx} \quad (1-23) \quad \psi = \frac{dY}{dx} + \frac{T}{KSG} \quad (1-24)$$

$$T = \frac{dC}{dx} + I\rho \omega^2 \psi \quad (1-25) \quad \frac{dT}{dx} = \rho S \omega^2 Y \quad (1-27)$$

Ici, l'élimination de T et ψ à partir des équations (1-23), (1-24) et (1-26) conduit à l'équation différentielle en Y et en C,

$$\frac{C}{EI} = \frac{d^2Y}{dx^2} + \frac{1}{KSG} \frac{dT}{dx} = \frac{d^2Y}{dx^2} + \frac{\rho S \omega^2}{KSG} Y$$

que nous dérivons deux fois par rapport à la variable x,

$$\frac{1}{EI} \frac{d^2C}{dx^2} = \frac{d^4Y}{dx^4} + \frac{\rho S \omega^2}{KSG} \frac{d^2Y}{dx^2}$$

pour éliminer C en tenant compte de (1-25)

$$\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{dT}{dx} - I\rho \omega^2 \frac{d\psi}{dx} = \rho S \omega^2 Y - I\rho \omega^2 \left(\frac{d^2Y}{dx^2} + \frac{\rho S \omega^2}{KSG} Y \right)$$

Il reste alors :

$$\frac{d^4Y}{dx^4} + \frac{\rho S \omega^2}{EI} \left(\frac{EI}{KSG} + \frac{I}{S} \right) \frac{d^2Y}{dx^2} - \frac{\rho S \omega^2}{EI} \left(1 - \frac{I\rho \omega^2}{KSG} \right) Y = 0 \quad (1-27)$$

La résolution de cette équation différentielle incite à introduire les grandeurs suivantes (10).

A cet effet, posons :

$$U = \frac{Y}{L}, \quad \alpha = \frac{x}{L}, \quad r^2 = \frac{I}{SL^2}, \quad s^2 = \frac{EI}{KSG L^2}, \quad b^2 = L^4 \frac{\rho S \omega^2}{EI}$$

L'équation (1-27) se transforme alors selon :

$$\frac{d^4U}{d\alpha^4} + b^2(r^2 + s^2) \frac{d^2U}{d\alpha^2} - b^2(1 - b^2 r^2 s^2) U = 0 \quad (1-28)$$

L'équation caractéristique affecte le développement :

$$\lambda^4 + b^2 (r^2 + s^2) \lambda^2 - b^2 (1 - b^2 r^2 s^2) = 0 \quad (1-29)$$

La pratique montre que le terme $b^2 r^2 s^2$ est presque toujours inférieur à l'unité, ce qui entraîne que le produit des racines de l'équation en λ^2 est négatif, la somme l'étant toujours visiblement. Dans ces conditions, l'équation caractéristique s'écrit :

$$(\lambda^2 + \lambda_1^2) (\lambda^2 - \lambda_2^2) = 0$$

où une identification immédiate montre que :

$$2\lambda_1^2 = b^2(r^2 + s^2) + [b^4(s^2 - r^2)^2 + 4b^2]^{1/2}$$

$$2\lambda_2^2 = -b^2(r^2 + s^2) + [b^4(s^2 - r^2)^2 + 4b^2]^{1/2}$$

λ_1 et λ_2 étant positifs.

Il en résulte que la solution générale de l'équation (1-28) s'écrit :

$$U = A_1 \sin \lambda_1 \alpha + A_2 \cos \lambda_1 \alpha + A_3 \operatorname{sh} \lambda_2 \alpha + A_4 \operatorname{ch} \lambda_2 \alpha \quad (1-30)$$

La suite des calculs nécessitera la connaissance des relations :

$$\lambda_1^2 - \lambda_2^2 = b^2 (r^2 + s^2)$$

$$\lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 = b^2 (1 - b^2 r^2 s^2)$$

$$\lambda_1^2 - b^2 s^2 = \lambda_2^2 + b^2 r^2$$

$$(\lambda_1^2 - b^2 s^2) (\lambda_2^2 + b^2 r^2) = b^2$$

Il nous faut maintenant exprimer les éléments de réduction de notre système, soit T , C , Ψ , Y .

Tout d'abord, l'élongation Y apparaît dans l'équation (1-30)

$$Y = L(A_1 \sin \lambda_1 \alpha + A_2 \cos \lambda_1 \alpha + A_3 \operatorname{sh} \lambda_2 \alpha + A_4 \operatorname{ch} \lambda_2 \alpha)$$

Considérons l'équation :

$$\frac{C}{EI} = \frac{d^2 Y}{dx^2} + \frac{\rho S \omega^2}{KSG} \cdot Y$$

En introduisant les variables réduites précédemment définies :

$$C = \frac{EI}{L} \left(\frac{d^2 U}{d\alpha^2} + b^2 s^2 U \right) \quad (1-31)$$

et en substituant dans (1-31), U , par sa valeur, il vient :

$$C = \frac{EI}{L} \left[A_1(-\lambda_1^2 + b^2 s^2) \sin \lambda_1 \alpha + A_2(-\lambda_1^2 + b^2 s^2) \cos \lambda_1 \alpha + \right. \\ \left. + A_3(\lambda_2^2 + b^2 s^2) \operatorname{sh} \lambda_2 \alpha + A_4(\lambda_2^2 + b^2 s^2) \operatorname{ch} \lambda_2 \alpha \right] \quad (1-32)$$

Il est utile de retenir la condition de nullité de ce moment :

$$A_1(-\lambda_1^2 + b^2 s^2) \sin \lambda_1 \alpha + A_2(-\lambda_1^2 + b^2 s^2) \cos \lambda_1 \alpha + \\ + A_3(\lambda_2^2 + b^2 s^2) \operatorname{sh} \lambda_2 \alpha + A_4(\lambda_2^2 + b^2 s^2) \operatorname{ch} \lambda_2 \alpha = 0 \quad (1-33)$$

Poursuivant la détermination des éléments de réduction du système, nous allons nous intéresser à l'effort tranchant.

Les relations (1-24) et (1-25) précédemment établies nous permettent d'écrire que :

$$T = \frac{dC}{dx} + I\rho \omega^2 \psi = \frac{dC}{dx} + I\rho \omega^2 \frac{dY}{dx} + \frac{I\rho \omega^2}{KSG} \cdot T$$

soit, en tenant compte de (1-32) :

$$T \left(1 - \frac{I\rho \omega^2}{KSG} \right) = I\rho \omega^2 \cdot \frac{dU}{d\alpha} + \frac{EI}{L^2} \cdot \frac{d^3 U}{d\alpha^3} + EI \frac{\rho S \omega^2}{KSG} \cdot \frac{dU}{d\alpha} \\ T = \frac{EI}{L^2 \left(1 - \frac{I\rho \omega^2}{KSG} \right)} \left(\frac{d^3 U}{d\alpha^3} + b^2 (r^2 + s^2) \frac{dU}{d\alpha} \right) \quad (1-34)$$

En définitive, l'effort tranchant affectera la forme :

$$T = \frac{EI \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2}{L^2 \left(1 - \frac{I\rho \omega^2}{KSG} \right)} \left[-A_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cos \lambda_1 \alpha + A_2 \cdot \lambda_2 \cdot \sin \lambda_1 \alpha + A_3 \cdot \lambda_1 \cdot \operatorname{ch} \lambda_2 \alpha + \right. \\ \left. + A_4 \cdot \lambda_1 \cdot \operatorname{sh} \lambda_2 \alpha \right] \quad (1-35)$$

Ici encore, nous remarquerons que la condition de nullité de T se réduit à : (1-36)

$$A_1.\lambda_2.\cos\lambda_1\alpha - A_2.\lambda_2.\sin\lambda_1\alpha - A_3.\lambda_1.\operatorname{ch}\lambda_2\alpha - A_4.\lambda_1.\operatorname{sh}\lambda_2\alpha = 0$$

Nous arrivons enfin au calcul de Ψ :

$$\Psi = \frac{dY}{dx} + \frac{T}{KSG}$$

et devient, en introduisant une fois encore les variables réduites :

$$\begin{aligned}\Psi &= \frac{dU}{d\alpha} + \frac{EI}{KSG L^2 \left[1 - \frac{I\rho\omega^2}{KSG} \right]} \left(\frac{d^3U}{d\alpha^3} + b^2(r^2+s^2) \frac{dU}{d\alpha} \right) \\ &= \frac{dU}{d\alpha} + \frac{s^2}{1-b^2r^2s^2} \left(\frac{d^3U}{d\alpha^3} + b^2(r^2+s^2) \frac{dU}{d\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{1-b^2r^2s^2} \left(s^2 \frac{d^3U}{d\alpha^3} + (1+b^2s^4) \frac{dU}{d\alpha} \right) \quad (1-37)\end{aligned}$$

Un processus analogue à celui des calculs précédents nous amène à :

$$\begin{aligned}\Psi &= \frac{1}{1-b^2r^2s^2} \cdot \frac{\lambda_1.\lambda_2}{b^2} \left[A_1\lambda_2(\lambda_1^2-b^2s^2)\cos\lambda_1\alpha - A_2\lambda_2(\lambda_1^2-b^2s^2) \right. \\ &\quad \left. \cdot \sin\lambda_1\alpha + A_3\lambda_1(\lambda_2^2+b^2s^2)\operatorname{ch}\lambda_2\alpha + A_4\lambda_1(\lambda_2^2+b^2s^2)\operatorname{sh}\lambda_2\alpha \right] \quad (1-38)\end{aligned}$$

avec la condition remarquable pour la nullité de Ψ :

$$\begin{aligned}A_1.\lambda_2(\lambda_1^2 - b^2s^2)\cos\lambda_1\alpha - A_2\lambda_2(\lambda_1^2 - b^2s^2)\sin\lambda_1\alpha + \\ + A_3\lambda_1(\lambda_2^2 + b^2s^2)\operatorname{ch}\lambda_2\alpha + A_4\lambda_1(\lambda_2^2 + b^2s^2)\operatorname{sh}\lambda_2\alpha = 0 \quad (1-39)\end{aligned}$$

Notre intention est de déterminer pour tous les cas possibles les pulsations naturelles d'une verge vibrant en flexion.

Commençons par le cas d'une verge "encastrée-libre". Ce cas est caractérisé par le fait que Y et Ψ sont nuls pour $\alpha = 0$ et que T et C sont nuls pour $\alpha = 1$.

Les relations traduisant la nullité des divers éléments de réduction que nous avons signalés conduisent au système :

$$A_2 + A_4 = 0$$

$$A_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 - b^2 s^2) + A_3 \lambda_1 (\lambda_2^2 + b^2 s^2) = 0$$

$$A_1 (\lambda_1^2 - b^2 s^2) \sin \lambda_1 + A_2 (\lambda_1^2 - b^2 s^2) \cos \lambda_1 - \\ - A_3 (\lambda_2^2 + b^2 s^2) \operatorname{sh} \lambda_2 - A_4 (\lambda_2^2 + b^2 s^2) \operatorname{ch} \lambda_2 = 0$$

$$A_1 \lambda_2 \cos \lambda_1 - A_2 \lambda_2 \sin \lambda_1 - A_3 \lambda_1 \operatorname{ch} \lambda_2 - A_4 \lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_2 = 0$$

La condition de compatibilité des solutions de ce système en A_1, A_2, A_3 et A_4 résulte de l'annulation du déterminant constitué par les coefficients relatifs à ces grandeurs.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda_2 (\lambda_1^2 - b^2 s^2) & 0 & \lambda_1 (\lambda_2^2 + b^2 s^2) & 0 \\ (\lambda_1^2 - b^2 s^2) \sin \lambda_1 & (\lambda_1^2 - b^2 s^2) \cos \lambda_1 & -(\lambda_2^2 + b^2 s^2) \operatorname{sh} \lambda_2 & -(\lambda_2^2 + b^2 s^2) \operatorname{ch} \lambda_2 \\ \lambda_2 \cos \lambda_1 & -\lambda_2 \sin \lambda_1 & -\lambda_1 \operatorname{ch} \lambda_2 & -\lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_2 \end{vmatrix} = 0$$

(1-40)

Après développement :

$$2(\lambda_1^2 - b^2 s^2) (\lambda_2^2 + b^2 s^2) + [(\lambda_2^2 + b^2 s^2)^2 + (\lambda_1^2 - b^2 s^2)^2] \cos \lambda_1 \operatorname{ch} \lambda_2 - \\ - (\lambda_2^2 + b^2 s^2) (\lambda_1^2 - b^2 s^2) (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \frac{\sin \lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} = 0$$

d'où on tire : (1-41)

$$2 + [2 + b^2(s^2 - r^2)^2] \cos \lambda_1 \operatorname{ch} \lambda_2 - b^2(r^2 + s^2) \frac{\sin \lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} = 0$$

Les autres cas correspondant aux diverses conditions aux limites relèvent de méthodes analogues à celles qui viennent d'être développées. Nous avons pensé qu'il serait fastidieux d'en développer les calculs et nous les avons consignés dans un tableau général.

Libre-libre	λ_2	0	$-\lambda_1$	0
	0	$-\lambda_1^2+b^2s^2$	0	$\lambda_2^2+b^2s^2$
	$\lambda_2 \cos \lambda_1$	$-\lambda_2 \sin \lambda_1$	$-\lambda_1 \operatorname{ch} \lambda_2$	$-\lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_2$
	$(-\lambda_1^2+b^2s^2) \sin \lambda_1$	$(-\lambda_1^2+b^2s^2) \cos \lambda_1$	$(\lambda_2^2+b^2s^2) \operatorname{sh} \lambda_2$	$(\lambda_2^2+b^2s^2) \operatorname{ch} \lambda_2$
T = 0	= 0			
C = 0				
	$2 - 2 \cos \lambda_1 \operatorname{ch} \lambda_2 + (b^4 r^2 (s^2 - r^2)^2 + b^2 (3r^2 - s^2)) \frac{\sin \lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} = 0$ (1-42)			
Encastrée-encastrée	0	1	0	1
	$\lambda_2 (\lambda_1^2 - b^2 s^2)$	0	$\lambda_1 (\lambda_2^2 + b^2 s^2)$	0
	$\sin \lambda_1$	$\cos \lambda_1$	$\operatorname{sh} \lambda_2$	$\operatorname{ch} \lambda_2$
	$\lambda_2 (\lambda_1^2 - b^2 s^2) \cos \lambda_1$	$-\lambda_2 (\lambda_1^2 - b^2 s^2) \sin \lambda_1$	$\lambda_1 (\lambda_2^2 + b^2 s^2) \operatorname{ch} \lambda_2$	$\lambda_1 (\lambda_2^2 + b^2 s^2) \operatorname{sh} \lambda_2$
Y = 0	=0			
$\psi = 0$				
	$2 - 2 \cos \lambda_1 \operatorname{ch} \lambda_2 + (b^4 s^2 (s^2 - r^2)^2 + b^2 (3s^2 - r^2)) \frac{\sin \lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_2}{\lambda_2 \lambda_1} = 0$ (1-43)			

Encastrée-appuyée	<table><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>$\lambda_2(\lambda_1^2 - b^2 s^2)$</td><td>0</td><td>$\lambda_1(\lambda_2^2 + b^2 s^2)$</td><td>0</td></tr><tr><td>$\sin \lambda_1$</td><td>$\cos \lambda_1$</td><td>$\operatorname{sh} \lambda_2$</td><td>$\operatorname{ch} \lambda_2$</td></tr><tr><td>$(-\lambda_1^2 + b^2 s^2) \sin \lambda_1$</td><td>$(-\lambda_1^2 + b^2 s^2) \cos \lambda_1$</td><td>$(\lambda_2^2 + b^2 s^2) \operatorname{sh} \lambda_2$</td><td>$(\lambda_2^2 + b^2 s^2) \operatorname{ch} \lambda_2$</td></tr></table>				0	1	0	1	$\lambda_2(\lambda_1^2 - b^2 s^2)$	0	$\lambda_1(\lambda_2^2 + b^2 s^2)$	0	$\sin \lambda_1$	$\cos \lambda_1$	$\operatorname{sh} \lambda_2$	$\operatorname{ch} \lambda_2$	$(-\lambda_1^2 + b^2 s^2) \sin \lambda_1$	$(-\lambda_1^2 + b^2 s^2) \cos \lambda_1$	$(\lambda_2^2 + b^2 s^2) \operatorname{sh} \lambda_2$	$(\lambda_2^2 + b^2 s^2) \operatorname{ch} \lambda_2$
	0	1	0	1																
	$\lambda_2(\lambda_1^2 - b^2 s^2)$	0	$\lambda_1(\lambda_2^2 + b^2 s^2)$	0																
	$\sin \lambda_1$	$\cos \lambda_1$	$\operatorname{sh} \lambda_2$	$\operatorname{ch} \lambda_2$																
$(-\lambda_1^2 + b^2 s^2) \sin \lambda_1$	$(-\lambda_1^2 + b^2 s^2) \cos \lambda_1$	$(\lambda_2^2 + b^2 s^2) \operatorname{sh} \lambda_2$	$(\lambda_2^2 + b^2 s^2) \operatorname{ch} \lambda_2$																	
Y = 0	Y = 0																			
ψ = 0	C = 0																			
	$\operatorname{tg} \lambda_1 - \frac{\lambda_2(\lambda_1^2 - b^2 s^2)}{\lambda_1(\lambda_2^2 + b^2 s^2)} \operatorname{th} \lambda_2 = 0$ (1-44)																			
Libre-appuyée	<table><tr><td>λ_2</td><td>0</td><td>$-\lambda_1$</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>$-\lambda_1^2 + b^2 s^2$</td><td>0</td><td>$\lambda_2^2 + b^2 s^2$</td></tr><tr><td>$\sin \lambda_1$</td><td>$\cos \lambda_1$</td><td>$\operatorname{sh} \lambda_2$</td><td>$\operatorname{ch} \lambda_2$</td></tr><tr><td>$(-\lambda_1^2 + b^2 s^2) \sin \lambda_1$</td><td>$(-\lambda_1^2 + b^2 s^2) \cos \lambda_1$</td><td>$(\lambda_2^2 + b^2 s^2) \operatorname{sh} \lambda_2$</td><td>$(\lambda_2^2 + b^2 s^2) \operatorname{ch} \lambda_2$</td></tr></table>				λ_2	0	$-\lambda_1$	0	0	$-\lambda_1^2 + b^2 s^2$	0	$\lambda_2^2 + b^2 s^2$	$\sin \lambda_1$	$\cos \lambda_1$	$\operatorname{sh} \lambda_2$	$\operatorname{ch} \lambda_2$	$(-\lambda_1^2 + b^2 s^2) \sin \lambda_1$	$(-\lambda_1^2 + b^2 s^2) \cos \lambda_1$	$(\lambda_2^2 + b^2 s^2) \operatorname{sh} \lambda_2$	$(\lambda_2^2 + b^2 s^2) \operatorname{ch} \lambda_2$
	λ_2	0	$-\lambda_1$	0																
	0	$-\lambda_1^2 + b^2 s^2$	0	$\lambda_2^2 + b^2 s^2$																
	$\sin \lambda_1$	$\cos \lambda_1$	$\operatorname{sh} \lambda_2$	$\operatorname{ch} \lambda_2$																
$(-\lambda_1^2 + b^2 s^2) \sin \lambda_1$	$(-\lambda_1^2 + b^2 s^2) \cos \lambda_1$	$(\lambda_2^2 + b^2 s^2) \operatorname{sh} \lambda_2$	$(\lambda_2^2 + b^2 s^2) \operatorname{ch} \lambda_2$																	
T = 0	Y = 0																			
C = 0	C = 0																			
	$\operatorname{tg} \lambda_1 - \frac{\lambda_2(\lambda_2^2 + b^2 s^2)}{\lambda_1(\lambda_1^2 - b^2 s^2)} \operatorname{th} \lambda_2 = 0$ (1-45)																			

Appuyée-appuyée				
$Y = 0$ $C = 0$ $Y = 0$ $C = 0$	0	1	0	1
	0	$-\lambda_1^2 + b^2 s^2$	0	$\lambda_2^2 + b^2 s^2$
	$\sin \lambda_1$	$\cos \lambda_1$	$\sin \lambda_2$	$\cos \lambda_2$
	$(-\lambda_1^2 + b^2 s^2) \sin \lambda_1$	$(-\lambda_1^2 + b^2 s^2) \cos \lambda_1$	$(\lambda_2^2 + b^2 s^2) \sin \lambda_2$	$(\lambda_2^2 + b^2 s^2) \cos \lambda_2$
				= 0
	$\sin \lambda_1 = 0$ (1-46)			

Nous avons voulu traiter complètement un exemple de détermination des éléments de réduction pour une pulsation naturelle déterminée. La raison de ce développement est que nous souhaitons en faire une référence à laquelle comparer des résultats obtenus par une méthode que nous proposerons par la suite.

Donnons nous les conditions arbitraires suivantes : la verge est libre en $\alpha = 0$, encastree en $\alpha = 1$. L'élongation maximum de l'extrémité libre est U_0 .

Il vient les relations :

$$\lambda_2 A_1 - \lambda_1 A_3 = 0$$

$$(-\lambda_1^2 + b^2 s^2) A_2 + (\lambda_2^2 + b^2 s^2) A_4 = 0$$

$$A_1 \sin \lambda_1 + A_2 \cos \lambda_1 + A_3 \operatorname{sh} \lambda_2 + A_4 \operatorname{ch} \lambda_2 = 0$$

$$A_2 + A_4 = U_0$$

Posons :

$$R = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad V = - \frac{-\lambda_1^2 + b^2 s^2}{\lambda_2^2 + b^2 s^2} \quad T = - \frac{\sin \lambda_1 + R \operatorname{sh} \lambda_2}{\cos \lambda_1 + V \operatorname{sh} \lambda_2}$$

L'élimination de A_1, A_2, A_3, A_4 fournit l'expression de l'élongation en variables réduites :

$$U = \frac{U_0}{T(1+V)} (\sin \lambda_1 \alpha + T \operatorname{ch} \lambda_1 \alpha + R \operatorname{sh} \lambda_2 \alpha + V T \operatorname{ch} \lambda_2 \alpha)$$

Les éléments caractérisant le problème T, C, ψ sont alors aisément déterminés. La suite de notre travail mettra l'accent sur l'incidence des effets secondaires.

III - ETUDE MATHÉMATIQUE DE LA FLEXION-TORSION

Nous avons renoncé à tenir compte des effets secondaires devant la complexité des calculs. Aussi, considèrera-t-on que les résultats qui vont suivre n'intéressent que les cas où les effets secondaires sont négligeables.

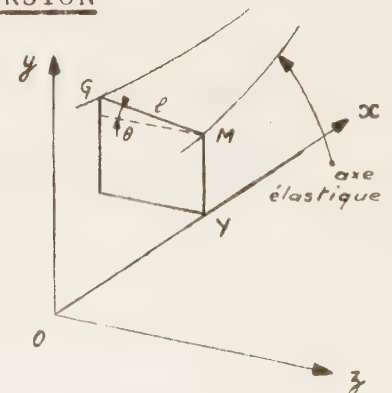


figure 1-3

Considérons une section droite où M est le centre de cisaillement et G le centre de gravité. La figure ci-contre précisera le choix des axes.

Posons $MG = \ell$.

Les équations fondamentales (1-1), (1-13), (1-14) et (1-15) restent valables et il faudra leur adjoindre les relations déterminant T et Γ .

Les coordonnées de M sont $(x, y, 0)$ d'où on déduit celles de G, $(x, y + \ell\theta, Z)$.

Appliquant la relation fondamentale de la dynamique à un élément, on a :

$$T - \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) = \rho S dx \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \ell \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right)$$

soit :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = - \rho S \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \rho S \ell \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (1-47)$$

Le théorème du moment cinétique achèvera de déterminer le problème ;

$$- \Gamma + \left(\Gamma + \frac{\partial \Gamma}{\partial x} dx \right) = I_\theta \cdot dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \rho S \ell dx \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \quad (1-48)$$

soit

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = I_\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \rho S \ell \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$$

Recherchant des solutions du type stationnaire, nous obtenons :

$$\frac{dT}{dx} = \rho S \omega^2 Y + \rho S \ell \omega^2 \theta \quad (1-49)$$

$$\frac{d\Gamma}{dx} = - I_\theta \omega^2 \theta - \rho S \ell \omega^2 Y \quad (1-50)$$

En sorte que les relations fondamentales précitées conduisent aux équations de couplage flexion-torsion :

$$\frac{C}{EI} = \frac{d\psi}{dx} = \frac{d^2 Y}{dx^2}$$

en dérivant deux fois cette équation :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 Y}{dx^2} \right] = \frac{d^2 C}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = + \rho S Y \omega^2 + \rho S l \omega^2 \theta$$

et en tenant compte du fait que

$$r = GJ \frac{d\theta}{dx}$$

Une nouvelle dérivation donne :

$$\frac{d r}{dx} = \frac{d}{dx} \left(GJ \frac{d\theta}{dx} \right) = - I_{\theta} \omega^2 \theta - \rho S l \omega^2 Y$$

Il reste alors les équations caractérisant le couplage flexion-torsion :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 Y}{dx^2} \right] - \rho S \omega^2 Y - \rho S l \omega^2 \theta = 0 \quad (1-51)$$

$$\frac{d}{dx} \left(GJ \frac{d\theta}{dx} \right) + I_{\theta} \omega^2 \theta + \rho S l \omega^2 Y = 0 \quad (1-52)$$

Nous allons maintenant calculer les pulsations naturelles de flexion-torsion. Pour cela nous poserons :

$$a = - \frac{\rho S \omega^2}{EI}$$

$$b = - \frac{\rho S l \omega^2}{EI}$$

$$c = \frac{I_{\theta} \omega^2}{GJ}$$

$$d = \frac{\rho S l \omega^2}{GJ}$$

Eliminant la fonction θ entre les équations (1-51) et (1-52), il vient immédiatement :

$$\frac{d^6 Y}{dx^6} + c \frac{d^4 Y}{dx^4} + a \frac{d^2 Y}{dx^2} + (ac - bd)Y = 0 \quad (1-53)$$

Opérant de même pour Y , on obtient l'équation différentielle en θ :

$$\frac{d^6 \theta}{dx^6} + c \frac{d^4 \theta}{dx^4} + a \frac{d^2 \theta}{dx^2} + (ac - bd)\theta = 0$$

dont on se propose de trouver les solutions.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont fonction de ω . Ces derniers deviennent constants si ω est fixé. On voit alors qu'il faut faire intervenir l'équation caractéristique :

$$r^6 + cr^4 + ar^2 + ac - bd = 0 \quad (1-54)$$

dont les racines en r donnent lieu à des solutions du type e^{rx} dont une combinaison linéaire représente la solution la plus générale de l'équation différentielle. Le problème se ramène au total à la connaissance de douze constantes, déterminant les fonctions $Y(x)$ et $\theta(x)$. En réalité, celles-ci sont parfaitement connues à partir de six constantes, par suite de la liaison existant entre les deux fonctions $Y(x)$ et $\theta(x)$.

Remarquons que les vibrations de flexion-torsion prennent généralement naissance lorsque les extrémités sont, soit encastrees, soit libres. Les conditions aux limites correspondantes s'écrivent :

- pour une extrémité libre :

$$C = 0 \quad ; \quad T = 0 \quad ; \quad r = 0$$

- pour une extrémité encastree :

$$Y = 0 \quad ; \quad \psi = 0 \quad ; \quad \theta = 0$$

Elles conditionnent six relations entre les six constantes.

Nous écrirons l'équation de compatibilité du système en annulant son déterminant caractéristique. Ceci fournira les valeurs de ω convenant au problème, c'est-à-dire les pulsations naturelles de flexion-torsion.

Un procédé commode pour annuler le déterminant auquel se prête fort bien le calcul automatique, sera d'essayer de nombreuses valeurs arbitraires de ω jusqu'à ce que les déterminants ainsi calculés aient des valeurs nulles.

R étant un rayon de giration tel que $I_0 = \rho S R^2$ on peut remarquer que l'expression :

$$\begin{aligned} ac - bd &= - \frac{\rho S I_0}{EI GJ} \omega^4 + \frac{\rho^2 S^2 l^2}{EIGJ} \omega^4 \\ &= - \frac{\rho^2 S^2 R^2}{EIGJ} \omega^4 + \frac{\rho^2 S^2 l^2}{EIGJ} \omega^4 \end{aligned}$$

si R est grand devant ℓ , est équivalente à $-\frac{\rho^2 S^2 R^2}{EIGJ} \omega^4$.

L'équation (1-54) devient alors :

$$r^6 + cr^4 + ar^2 + ac = 0$$

et peut être mise sous la forme :

$$(r^4 + a)(r^2 + c) = 0$$

soit en revenant aux définitions de a et c :

$$\left(r^4 - \frac{\rho S \omega^2}{EI} \right) \left(r^2 + \frac{I \theta \omega^2}{GJ} \right) = 0$$

Les relations $r^4 - \frac{\rho S \omega^2}{EI} = 0$ et $r^2 + \frac{I \theta \omega^2}{GJ} = 0$ correspondent respectivement à la flexion et à la torsion dans le cas où le couplage est négligeable.

Nous pouvons donc penser qu'un couplage faible sera tel que l'équation (1-54) aura des solutions de la forme :

$$\begin{array}{ll} r_1 = j\beta & r_2 = -j\beta \\ r_3 = j\gamma & r_4 = -j\gamma \\ r_5 = \delta & r_6 = -\delta \end{array}$$

β, γ, δ , étant réels.

Les fonctions Y(x) et $\theta(x)$ deviennent alors :

$$Y(x) = A_1 e^{\delta x} + B_1 e^{-\delta x} + C_1 \cos \beta x + D_1 \sin \beta x + E_1 \cos \gamma x + F_1 \sin \gamma x$$

$$\theta(x) = A_2 e^{\delta x} + B_2 e^{-\delta x} + C_2 \cos \beta x + D_2 \sin \beta x + E_2 \cos \gamma x + F_2 \sin \gamma x$$

Procédons à la réduction du nombre de constantes. Comme nous l'avons énoncé plus haut, il suffit pour cela d'utiliser l'équation :

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} + c\theta + dY = 0$$

Nous devons au préalable expliciter $\frac{d^2 \theta}{dx^2}$ et, en identifiant terme à terme, six relations apparaissent :

$$\delta^2 A_2 + c A_2 + d A_1 = 0$$

$$\delta^2 B_2 + c B_2 + d B_1 = 0$$

$$c C_2 + d C_1 - \beta^2 C_2 = 0$$

$$c D_2 + d D_1 - \beta^2 D_2 = 0$$

$$c E_2 + d E_1 - \gamma^2 E_2 = 0$$

$$c F_2 + d F_1 - \gamma^2 F_2 = 0$$

Il est alors facile d'exprimer des constantes A_2 , B_2 , C_2 , D_2 , E_2 et F_2 en fonction des constantes A_1 , B_1 , C_1 , D_1 , E_1 et F_1 .

L'expression définitive de $\theta(x)$ devient :

$$\begin{aligned} \theta(x) = & - \frac{d A_1}{\delta^2 + c} e^{\delta x} - \frac{d B_1}{\delta^2 + c} e^{-\delta x} + \frac{d C_1}{\beta^2 - c} \cos \beta x + \frac{d D_1}{\beta^2 - c} \sin \beta x + \\ & + \frac{d E_1}{\gamma^2 - c} \cos \gamma x + \frac{d F_1}{\gamma^2 - c} \sin \gamma x \end{aligned}$$

Restreignons-nous au cas d'une verge encastree-libre, les conditions aux limites actuelles sont :

$$\begin{aligned} - \text{pour } x = 0 \quad Y = 0 \quad \frac{dY}{dx} = 0, \quad \theta = 0 \\ - \text{pour } x = L \quad \frac{d\theta}{dx} = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 Y}{dx^3} = 0 \end{aligned}$$

ayant effectué le calcul de $\frac{dY}{dx}$, $\frac{d^2 Y}{dx^2}$, $\frac{d^3 Y}{dx^3}$, $\frac{d\theta}{dx}$, on obtient les six relations linéaires relatives aux constantes A_1 , B_1 , C_1 , D_1 , E_1 et F_1 .

$$\begin{aligned} x = 0 \quad Y = 0 \quad A_1 + B_1 + C_1 + E_1 &= 0 \\ \frac{dY}{dx} = 0 \quad A_1 \delta - B_1 \delta + D_1 \beta + F_1 \gamma &= 0 \\ \theta = 0 \quad - \frac{d A_1}{\delta^2 + c} - \frac{d B_1}{\delta^2 + c} + \frac{d C_1}{\beta^2 - c} + \frac{d E_1}{\gamma^2 - c} &= 0 \\ x = L \quad \frac{d^2 Y}{dx^2} = 0 \quad A_1 \delta^2 e^{\delta L} + B_1 \delta^2 e^{-\delta L} - C_1 \beta^2 \cos \beta L - \\ & D_1 \beta^2 \sin \beta L - E_1 \gamma^2 \cos \gamma L - F_1 \gamma^2 \sin \gamma L = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d^3\gamma}{dx^3} = 0$$

$$A_1 \delta^3 e^{\delta L} - B_1 \delta^3 e^{-\delta L} + C_1 \beta^3 \sin \beta L - D_1 \beta^3 \cos \beta L + E_1 \gamma^3 \sin \gamma L - F_1 \gamma^3 \cos \gamma L = 0$$

$$\frac{d\theta}{dx} = 0$$

$$- \frac{d\delta}{\delta^2 + c} \frac{A_1 e^{\delta L}}{\delta^2 + c} + \frac{d\delta}{\delta^2 + c} \frac{B_1 e^{-\delta L}}{\delta^2 + c} - \frac{d}{\beta^2 - c} \frac{\beta C_1 \sin \beta L}{\beta^2 - c} + \frac{d\beta}{\beta^2 - c} \frac{D_1 \cos \beta L}{\beta^2 - c} - \frac{d\gamma}{\gamma^2 - c} \frac{E_1 \sin \gamma L}{\gamma^2 - c} + \frac{d\gamma}{\gamma^2 - c} \frac{F_1 \cos \gamma L}{\gamma^2 - c} = 0$$

Il ne reste plus qu'à annuler le déterminant du 6ème ordre des constantes précédentes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \delta & -\delta & 0 & \beta & 0 & \gamma \\ -\frac{d}{\delta^2 + c} & -\frac{d}{\delta^2 + c} & \frac{d}{\beta^2 - c} & 0 & \frac{d}{\gamma^2 - c} & 0 \\ \delta^2 e^{\delta L} & \delta^2 e^{-\delta L} & -\beta^2 \cos \beta L & -\beta^2 \sin \beta L & -\gamma^2 \cos \gamma L & -\gamma^2 \sin \gamma L \\ \delta^3 e^{\delta L} & -\delta^3 e^{-\delta L} & \beta^3 \sin \beta L & -\beta^3 \cos \beta L & \gamma^3 \sin \gamma L & -\gamma^3 \cos \gamma L \\ -\frac{d\delta e^{\delta L}}{\delta^2 + c} & \frac{d\delta e^{-\delta L}}{\delta^2 + c} & -\frac{d\beta \sin \beta L}{\beta^2 - c} & \frac{d\beta \cos \beta L}{\beta^2 - c} & -\frac{d\gamma \sin \gamma L}{\gamma^2 - c} & \frac{d\gamma \cos \gamma L}{\gamma^2 - c} \end{vmatrix} = 0$$

Nous avons tenu à compléter l'exposé qui précède en nous constituant un objet de référence.

Etudions une verge prismatique ayant une section droite semi-circulaire. Le mouvement de la verge est parallèle à OY, G et A respectivement le centre de gravité et le centre de cisaillement d'une section transversale, sont sur Ox.

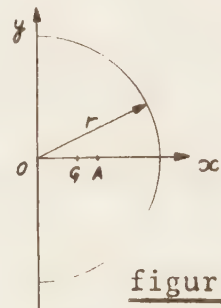


figure 1-4

La première définition du centre de cisaillement est due à Timoshenko. Si l'extrémité de la verge est soumise à une force F parallèle à OY, il lui correspond dans une section droite, des contraintes de cisaillement T_1 et T_2 . La distance α du centre de cisaillement à l'axe des Y sera déterminée par l'équilibre des moments, c'est-à-dire déduite de :

$$\alpha = \frac{1}{F} \iint (x \cdot T_1 - T_2 y) dx dy$$

Trefftz a donné une deuxième définition. Si l'extrémité de la verge est soumise à un couple C et tourne de l'angle α , l'énergie emmagasinée sera :

$$W_1 = \frac{1}{2} C \alpha$$

Si l'extrémité de la verge est soumise à une force F produisant un déplacement d parallèle à OY, il correspondra :

$$W_2 = \frac{1}{2} F d$$

Appliquons alors le couple C de façon à fournir l'énergie W_1 . Superposons alors la force F, il lui correspondra l'énergie W_2 et une énergie d'interaction.

Trefftz définit le centre de cisaillement comme le point tel que l'énergie d'interaction soit nulle.

Pour la section droite que nous considérons ici, les résultats sont les suivants (11) :

$$\alpha \text{ Timoshenko} = \frac{8}{15\pi} \frac{3 + 4\sigma}{1 + \sigma} \cdot r$$

σ coefficient de Poisson

$$\alpha \text{ Trefftz} = \frac{8r}{5\pi}$$

L'inertie polaire par rapport à A est aisément calculée par le théorème de Steiner, G, centre de gravité de la section droite, est tel que : $OG = 0,4244 r$.

Le calcul des pulsations naturelles de flexion-torsion a été effectué en se donnant :

$$\begin{aligned} L, \text{ longueur de la verge} &= 3.10^{-1} \\ r &= 10^{-2} \\ \rho &= 7,8.10^3 \\ E &= 2.10^{11} \end{aligned}$$

Pour les trois premiers modes, les résultats ont été les suivants en utilisant tour à tour les valeurs de OA précédentes.

	Timoshenko	Trefftz
$\omega_1(\text{sec}^{-1})$	989,04	989,08
$\omega_2(\text{sec}^{-1})$	6195,1	6197,0
$\omega_3(\text{sec}^{-1})$	16813	16621

Les deux premières fréquences ω_1 et ω_2 sont approximativement les deux premières fréquences de flexion de la verge et ω_3 la première fréquence de torsion.

On constate pour les deux premières fréquences une différence très faible des valeurs de ω .

IV - COEFFICIENTS D'INFLUENCE EN FLEXION

Nous avons tenu à ramener le cas général de la flexion où se manifestaient des effets secondaires, à la formulation de la flexion simple.

En d'autres termes, nous avons voulu introduire des facteurs tels que leur présence dans les formules simples de la flexion rendaient automatiquement compte de l'existence des effets secondaires.

La résolution d'un problème de flexion lié à des conditions aux limites particulières, fait intervenir un jeu de n constantes $b_1, b_2, \dots, b_n$, liées à chaque mode. En effet, les pulsations naturelles de flexion sans effets secondaires sont déduites de la relation :

$$\beta^2 = \frac{\rho S}{EI} \cdot \omega^2$$

avec, pour le n ème mode : $\sqrt{\beta_n} \cdot L = \sqrt{b_n}$, d'où les pulsations naturelles sont déterminées par la formule :

$$\omega_n = \frac{b_n}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

Nous allons, dans le cas des effets secondaires, modifier la formule en lui donnant la forme :

$$\omega_n = \frac{b_n \cdot \alpha_n}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

dans laquelle α_n est un coefficient d'influence déterminé à partir des relations (1-41), (1-42), ... (1-46).

Etant donné leur grande importance dans la pratique, nous avons considéré des sections droites circulaires et rectangulaires. Les calculs ont été limités à des dimensions telles que :

$$0 < r^2 < 9.10^{-4}$$

auxquelles nous rattacherons la définition géométrique d'une verge.

On peut considérer que les valeurs numériques ainsi envisagées conditionnent le qualificatif de verges, pour lesquelles les équations utilisées sont valables.

Les tableaux que l'on trouvera ont été constitués pour les divers cas de sollicitations, et ont été limités dans chaque cas, aux cinq premiers modes. Ils contiennent les valeurs numériques de coefficients α_n respectivement pour des sections droites, rectangulaires et circulaires.

Nous avons pensé qu'il pouvait être de quelque utilité que le réseau de résultats enregistrés soit suffisamment dense afin de permettre des interpolations assez précises. Ces renseignements peuvent servir de base à la constitution d'abaques.

verge encastrée-libre

$$b_1=3,51601 \quad b_2=22,0345 \quad b_3=61,6972 \quad b_4=120,902 \quad b_5=199,859$$

r^2		α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
$5 \cdot 10^{-5}$	Sr	0,99943	0,99605	0,99068	0,98300	0,97334
	Sc	0,99948	0,99639	0,99149	0,98446	0,97543
10^{-4}	Sr	0,99886	0,99215	0,98164	0,96695	0,94898
	Sc	0,99896	0,99283	0,98322	0,96974	0,95318
$3 \cdot 10^{-4}$	Sr	0,99660	0,97703	0,94811	0,91065	0,86885
	Sc	0,99690	0,97899	0,95237	0,91757	0,87839
$5 \cdot 10^{-4}$	Sr	0,99436	0,96260	0,91813	0,86404	0,80770
	Sc	0,99485	0,96574	0,92456	0,87385	0,82037
$7 \cdot 10^{-4}$	Sr	0,99213	0,94883	0,89110	0,82454	0,75882
	Sc	0,99282	0,95304	0,89931	0,83641	0,77243
$9 \cdot 10^{-4}$	Sr	0,98992	0,93564	0,86654	0,79042	0,71846
	Sc	0,99078	0,94085	0,87620	0,80381	0,73431

verge appuyée-appuyée

$$b_1=9,8696 \quad b_2=39,4784 \quad b_3=88,8264 \quad b_4=157,913 \quad b_5=246,740$$

r^2		α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
$5 \cdot 10^{-5}$	Sr	0,99879	0,99520	0,98933	0,98130	0,97133
	Sc	0,99890	0,99562	0,99026	0,98281	0,97877
10^{-4}	Sr	0,99759	0,99049	0,97906	0,96381	0,94542
	Sc	0,99780	0,99132	0,98086	0,96685	0,94988
$3 \cdot 10^{-4}$	Sr	0,99284	0,97242	0,94150	0,90350	0,86167
	Sc	0,99346	0,97476	0,94625	0,91091	0,87164
$5 \cdot 10^{-4}$	Sr	0,98817	0,95561	0,90861	0,85462	0,79895
	Sc	0,98919	0,95918	0,91568	0,86499	0,81211
$7 \cdot 10^{-4}$	Sr	0,98357	0,93956	0,87942	0,81375	0,74932
	Sc	0,98499	0,94445	0,88835	0,82623	0,76449
$9 \cdot 10^{-4}$	Sr	0,97906	0,92454	0,85324	0,77882	0,70860
	Sc	0,98085	0,93051	0,86369	0,79284	0,72509

verge libre-libre

$b_1=22,3732$ $b_2=61,6728$ $b_3=120,903$ $b_4=199,859$ $b_5=298,555$

r^2		α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
$5 \cdot 10^{-5}$	Sr	0,99757	0,99288	0,98605	0,97714	0,96638
	Sc	0,99770	0,99336	0,98707	0,97886	0,96893
10^{-4}	Sr	0,99517	0,98594	0,97278	0,95608	0,93652
	Sc	0,99543	0,98689	0,97474	0,95928	0,94112
$3 \cdot 10^{-4}$	Sr	0,98579	0,95987	0,92551	0,88550	0,84284
	Sc	0,98654	0,96247	0,93048	0,89298	0,85270
$5 \cdot 10^{-4}$	Sr	0,97674	0,93612	0,88551	0,83025	0,77495
	Sc	0,97796	0,94011	0,89267	0,84042	0,78761
$7 \cdot 10^{-4}$	Sr	0,96801	0,91434	0,85093	0,78515	0,72227
	Sc	0,96966	0,91951	0,85975	0,79711	0,73659
$9 \cdot 10^{-4}$	Sr	0,95958	0,89424	0,82057	0,74724	0,67957
	Sc	0,96162	0,90042	0,83068	0,76046	0,69493

verge encastree-encastree

$b_1=22,3732$ $b_2=61,6728$ $b_3=120,903$ $b_4=199,859$ $b_5=298,555$

r^2		α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
$5 \cdot 10^{-5}$	Sr	0,99490	0,98845	0,97998	0,96957	0,95744
	Sc	0,99544	0,98958	0,98189	0,97238	0,95891
10^{-4}	Sr	0,98989	0,97730	0,96122	0,94201	0,92041
	Sc	0,99094	0,97951	0,96482	0,94716	0,92716
$3 \cdot 10^{-4}$	Sr	0,97062	0,93642	0,89637	0,85290	0,80869
	Sc	0,97357	0,94226	0,90513	0,86433	0,82236
$5 \cdot 10^{-4}$	Sr	0,95247	0,90048	0,84380	0,78643	0,73178
	Sc	0,95713	0,90918	0,85599	0,80133	0,74857
$7 \cdot 10^{-4}$	Sr	0,93534	0,86854	0,79996	0,73421	0,67440
	Sc	0,94152	0,87950	0,81452	0,75114	0,69271
$9 \cdot 10^{-4}$	Sr	0,91913	0,83989	0,76266	0,69170	0,62937
	Sc	0,92670	0,85267	0,77870	0,70985	0,64839

verge encastrée-appuyée

		$b_1=15,4182$	$b_2=49,9648$	$b_3=104,247$	$b_4=178,269$	$b_5=272,030$
r^2		α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
$5 \cdot 10^{-5}$	Sr	0,99707	0,99209	0,98490	0,97565	0,96457
	Sc	0,99736	0,99284	0,98629	0,97785	0,96768
10^{-4}	Sr	0,99417	0,98417	0,97055	0,94986	0,93314
	Sc	0,99474	0,98586	0,97321	0,95731	0,93874
$3 \cdot 10^{-4}$	Sr	0,98282	0,95546	0,91947	0,87833	0,83499
	Sc	0,98450	0,95949	0,92624	0,88781	0,84691
$5 \cdot 10^{-4}$	Sr	0,97188	0,92918	0,87642	0,82012	0,76460
	Sc	0,97459	0,93535	0,88615	0,83292	0,77974
$7 \cdot 10^{-4}$	Sr	0,96132	0,90513	0,83941	0,77301	0,71061
	Sc	0,96500	0,91311	0,85135	0,78794	0,72754
$9 \cdot 10^{-4}$	Sr	0,95111	0,88301	0,80710	0,73376	0,66736
	Sc	0,95570	0,89253	0,82072	0,75013	0,68531

verge libre appuyée

		$b_1=15,4182$	$b_2=49,9648$	$b_3=104,247$	$b_4=178,269$	$b_5=272,030$
r^2		α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
$5 \cdot 10^{-5}$	Sr	0,99820	0,99410	0,98774	0,97927	0,96889
	Sc	0,99833	0,99455	0,98872	0,98094	0,97139
10^{-4}	Sr	0,99641	0,98833	0,97602	0,96003	0,94102
	Sc	0,99666	0,98922	0,97789	0,96315	0,94556
$3 \cdot 10^{-4}$	Sr	0,98938	0,9641	0,93366	0,89458	0,85226
	Sc	0,99011	0,96889	0,93853	0,90204	0,86220
$5 \cdot 10^{-4}$	Sr	0,98254	0,94615	0,89718	0,84246	0,78689
	Sc	0,98371	0,95001	0,90433	0,85274	0,79983
$7 \cdot 10^{-4}$	Sr	0,97586	0,92733	0,86524	0,79941	0,73570
	Sc	0,97747	0,93240	0,74159	0,81165	0,75046
$9 \cdot 10^{-4}$	Sr	0,96935	0,90978	0,83690	0,76293	0,69397
	Sc	0,97137	0,91590	0,84722	0,77658	0,70989

Nous sommes bien conscients que n'ont été étudiées jusque là, que des géométries particulières, en l'occurrence, celles où les sections droites sont constantes. La suite de notre travail sera marquée par l'extension des résultats acquis actuellement à des géométries plus complexes.

Néanmoins, il nous a paru nécessaire de préciser les méthodes classiques d'analyse dynamique des verges en leur faisant, dans le cas de la flexion, couvrir l'apparition des effets secondaires, et en étudiant la flexion-torsion. C'est ainsi que nous avons proposé l'introduction de coefficients d'influence qui permettaient de sauvegarder l'allure générale des résultats classiques.

CHAPITRE 2

DETERMINATION DES PULSATIONS NATURELLES DE FLEXION

Le but du présent chapitre est de développer l'exposé d'une méthode originale permettant de calculer les pulsations naturelles de flexion d'une verge, et d'associer à chacune des pulsations trouvées, les éléments de réduction correspondants, T , C , ψ , Y .

L'objet de notre travail aura été d'accéder aux pulsations naturelles de flexion, où il n'aura pas été tenu compte des effets secondaires. Ensuite, nous ferons intervenir les effets secondaires et enfin, nous nous intéresserons au phénomène de flexion, compliqué par l'effet centrifuge. On comprendra qu'il était nécessaire dans un premier chapitre, d'effectuer quelques calculs à partir des méthodes classiques afin d'en comparer les résultats à ceux de notre méthode.

Les travaux intéressant la recherche des pulsations naturelles d'un milieu continu différent les uns des autres par le modèle mathématique représentant l'élément de masse. Comme on le sait, Lagrange a été le premier à opérer de la sorte. Les théories localisent les masses aux extrémités de l'élément. Il n'est pas à s'étonner de cet état de fait, car l'application de la formule fondamentale de la dynamique n'est possible qu'à une masse localisée.

Nous allons supposer que, pour un élément de masse M_k , la variation d'effort tranchant est en régime stationnaire.

$$T_{k-1} - T_k = \frac{M_k \omega^2 (Y_{k-1} + Y_k)}{2}$$

Cette relation est très simple. Elle équivaut à admettre que la variation d'effort tranchant n'est due qu'à la seule force d'inertie du milieu de l'élément supposé doué de la masse totale de ce dernier.

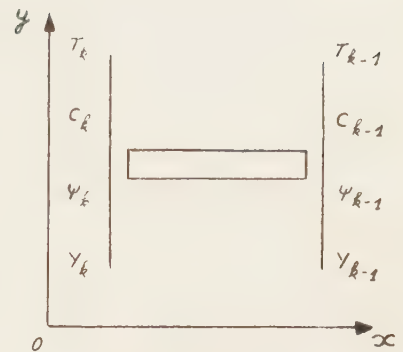


figure 2-1

De plus, nous assimilons l'élément à un rectangle et lui imposons un mouvement de translation vertical.

A priori, il aurait été nécessaire de tempérer la simplicité de l'hypothèse en écrivant une condition de liaison convenable, par exemple :

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left[(Y_k - Y_{k-1})^2 + (x_k - x_{k-1})^2 \right]^{\frac{1}{2}} = L \lambda$$

L étant la longueur de la verge.

Il en résulterait l'introduction de n multiplicateurs de Lagrange. Renoncer à écrire la liaison revient à admettre l'élimination automatique des multiplicateurs imputable aux relations linéaires existant entre les ordonnées du milieu et des extrémités de l'élément.

La répercussion de l'hypothèse initiale sur l'effort tranchant se fait évidemment sentir sur les quantités auxquelles le problème est référé. Il n'est alors pas possible de donner une interprétation simple de l'expression nouvelle du couple de flexion. Il n'y a pas de corrélation immédiate entre la définition usuelle et l'écriture actuelle de cette quantité. Il en est de même pour toutes les autres quantités.

I - DETERMINATION D'UNE MATRICE DE TRANSFERT POUR LA FLEXION SANS EFFETS SECONDAIRES (12)

Les diverses quantités $T = \frac{dC}{dx}$, $\frac{C}{EI} = \frac{d\psi}{dx}$, $\psi = \frac{dY}{dx}$

ne vont pas faire l'objet d'une distribution continue. Si l'on désigne par T_k l'effort tranchant appliqué à la surface frontale de l'élément, on calculera l'effort tranchant T_{k-1} par un développement limité du type :

$$\begin{aligned} T_{k-1} &= T_k + \left(\frac{dT}{dx} \right)_k dx \\ &= T_k + \frac{M_{k,\omega^2}}{2} (Y_{k-1} + Y_k) \end{aligned}$$

Mettons en évidence des équations analogues pour les autres éléments de réduction.

Un développement limité, poussé au deuxième ordre permet alors d'obtenir l'expression du moment fléchissant.

$$\begin{aligned} C_{k-1} &= C_k + \left(\frac{dC}{dx} \right)_k dx + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2C}{dx^2} \right)_k dx^2 \\ &= C_k + L_k \cdot T_k + \frac{M_{k,\omega^2}}{4} \cdot L_k (Y_{k-1} + Y_k) \end{aligned}$$

Intéressons nous à la pente, en effectuant un développement limité du 3ème ordre :

$$\begin{aligned} \psi_{k-1} &= \psi_k + \left(\frac{d\psi}{dx} \right)_k dx + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\psi}{dx^2} \right)_k dx^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3\psi}{dx^3} \right)_k dx^3 \\ &= \psi_k + \frac{L_k}{EI_k} C_k + \frac{L_k^2}{2EI_k} T_k + \frac{M_{k,\omega^2} \cdot L_k^2}{12EI_k} (Y_{k-1} + Y_k) \end{aligned}$$

L'expression de la déflexion par un développement au 4ème ordre permet de déterminer complètement le problème.

$$\begin{aligned} Y_{k-1} &= Y_k + \left(\frac{dY}{dx} \right)_k dx + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2Y}{dx^2} \right)_k dx^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3Y}{dx^3} \right)_k dx^3 + \\ &\quad + \frac{1}{24} \left(\frac{d^4Y}{dx^4} \right)_k dx^4 \\ &= Y_k + L_k \cdot \psi_k + \frac{L_k^2}{2EI_k} C_k + \frac{L_k^3}{6EI_k} T_k + \frac{M_{k,\omega^2} \cdot L_k^3}{48EI_k} (Y_{k-1} + Y_k) \end{aligned}$$

Afin d'alléger les calculs, posons :

$$a_k = 1 - \frac{M_{k,\omega^2} \cdot L_k^3}{48EI_k}$$

$$b_k = 2 - a_k$$

$$d_k = \frac{L_k^2}{2EI_k}$$

$$e_k = \frac{M_{k,\omega^2}}{2}$$

Il nous faut relier les éléments de réduction d'indice $k-1$ à ceux d'indice k . Ajoutons Y_k aux deux membres de la dernière équation, il vient :

$$Y_{k-1} + Y_k = 2Y_k + L_k \cdot \psi_k + \frac{L_k^2}{2EI_k} C_k + \frac{L_k^3}{6EI_k} T_k + \frac{M_{k,\omega^2} \cdot L_k^3 (Y_{k-1} + Y_k)}{48EI_k}$$

d'où :

$$Y_{k-1} + Y_k = \frac{2}{a_k} Y_k + \frac{L_k}{a_k} \psi_k + \frac{d_k}{a_k} C_k + \frac{L_k \cdot d_k}{3a_k} T_k$$

ce qui entraîne :

$$Y_{k-1} = \frac{L_k \cdot d_k}{3a_k} T_k + \frac{d_k}{a_k} C_k + \frac{L_k}{a_k} \psi_k + \frac{b_k}{a_k} Y_k$$

On obtient ensuite facilement les équations relatives à T_{k-1} , C_{k-1} , ψ_{k-1} . En ce qui concerne T_{k-1} :

$$T_{k-1} = T_k + e_k \left(\frac{2}{a_k} Y_k + \frac{L_k}{a_k} \psi_k + \frac{d_k}{a_k} C_k + \frac{L_k \cdot d_k}{3a_k} T_k \right)$$

$$T_{k-1} = \left(1 + \frac{L_k \cdot d_k \cdot e_k}{3a_k} \right) T_k + \frac{e_k \cdot d_k}{a_k} C_k + \frac{e_k \cdot L_k}{a_k} \psi_k + \frac{2e_k}{a_k} Y_k$$

Pour C_{k-1} , on a :

$$C_{k-1} = C_k + L_k \cdot T_k + \frac{e_k \cdot L_k}{2} \left(\frac{2}{a_k} Y_k + \frac{L_k}{a_k} \psi_k + \frac{d_k}{a_k} C_k + \frac{L_k \cdot d_k}{3a_k} T_k \right)$$

$$C_{k-1} = L_k \left(1 + \frac{e_k \cdot d_k \cdot L_k}{6a_k} \right) T_k + \left(1 + \frac{e_k \cdot L_k \cdot d_k}{2a_k} \right) C_k + \frac{e_k \cdot L_k^2}{2a_k} \psi_k + \frac{e_k \cdot L_k}{a_k} Y_k$$

et enfin :

$$\psi_{k-1} = \psi_k + \frac{2d_k}{L_k} C_k + d_k \cdot T_k + \frac{d_k \cdot e_k}{3} \left(\frac{2}{a_k} Y_k + \frac{L_k}{a_k} \psi_k + \frac{d_k}{a_k} C_k + \frac{L_k \cdot d_k}{3a_k} T_k \right)$$

$$\psi_{k-1} = d_k \left(1 + \frac{d_k \cdot e_k \cdot L_k}{9a_k} \right) T_k + d_k \left(\frac{2}{L_k} + \frac{d_k \cdot e_k}{3a_k} \right) C_k + \left(1 + \frac{d_k \cdot e_k \cdot L_k}{3a_k} \right) \psi_k + \frac{2d_k \cdot e_k}{3a_k} Y_k$$

On peut résumer les relations précédentes en introduisant la matrice A_k , telle que :

$$\begin{pmatrix} T_{k-1} \\ C_{k-1} \\ \psi_{k-1} \\ Y_{k-1} \end{pmatrix} = \boxed{A_k} \begin{pmatrix} T_k \\ C_k \\ \psi_k \\ Y_k \end{pmatrix}$$

dans laquelle :

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 + \frac{d_k \cdot e_k \cdot L_k}{3a_k} \\ a_{12} &= \frac{e_k \cdot d_k}{a_k} \\ a_{13} &= \frac{e_k \cdot L_k}{a_k} \\ a_{14} &= \frac{2e_k}{a_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{31} &= d_k \left(1 + \frac{d_k \cdot e_k \cdot L_k}{9a_k} \right) \\ a_{32} &= d_k \left(\frac{2}{L_k} + \frac{d_k \cdot e_k}{3a_k} \right) \\ a_{33} &= 1 + \frac{d_k \cdot e_k \cdot L_k}{3a_k} \\ a_{34} &= \frac{2d_k \cdot e_k}{3a_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= L_k \left(1 + \frac{e_k \cdot d_k \cdot L_k}{6a_k} \right) \\ a_{22} &= 1 + \frac{e_k \cdot d_k \cdot L_k}{2a_k} \\ a_{23} &= \frac{e_k \cdot L_k^2}{2a_k} \\ a_{24} &= \frac{e_k \cdot L_k}{a_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{41} &= \frac{L_k \cdot d_k}{3a_k} \\ a_{42} &= \frac{d_k}{a_k} \\ a_{43} &= \frac{L_k}{a_k} \\ a_{44} &= \frac{b_k}{a_k} \end{aligned}$$

II - DETERMINATION D'UNE MATRICE DE TRANSFERT ETENDUE AUX EFFETS SECONDAIRES

Il est d'usage de représenter le moment d'inertie d'un élément autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure, par un terme d'expression générale $I_0 dx$.

Cette façon de voir est justifiée par la petitesse de la longueur de l'élément devant son épaisseur. Notre intention étant de découper les solides que nous étudions, en un certain nombre de constituants aussi peu nombreux que possible, mais compatibles avec une précision suffisante dans la détermination des pulsations naturelles, il devient nécessaire de revenir sur l'évaluation de l'inertie.

Si on assimile le profil longitudinal de l'élément à un rectangle, ce qui est toujours admissible dans la pratique, l'inertie de rotation autour d'un axe passant par le centre d'inertie et perpendiculaire au plan de la figure, se calculera aisément en passant par l'intermédiaire de deux plans dont les traces sont les droites Δ_1 et Δ_2 de la figure.

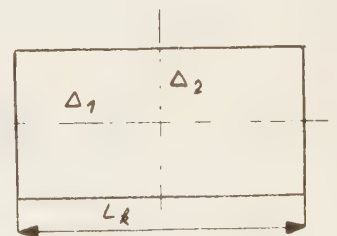


figure 2-2

A l'élément d'ordre k correspondra I_{fk} , moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation en flexion.

$$\begin{aligned} I_{fk} &= I_{\Delta_1} + I_{\Delta_2} \\ &= I_k \cdot L_k + \frac{S_k \cdot L_k^3}{12} \end{aligned}$$

S_k , aire d'une section droite de l'élément.

Les effets secondaires se font sentir sur les modes d'ordre supérieur, il suffit pour s'en convaincre de se référer aux valeurs des coefficients d'influence que nous avons établis dans le premier chapitre.

Nous allons procéder au calcul des éléments de réduction en tenant compte des considérations précédentes.

L'équation propre à l'effort tranchant est :

$$T_{k-1} = T_k + \left(\frac{dT}{dx} \right)_k dx = T_k + \frac{M_{k,\omega^2}}{2} (Y_{k-1} + Y_k)$$

Le calcul du moment fléchissant est par contre modifié, et on voit apparaître deux termes traduisant l'existence d'une inertie de rotation :

$$\begin{aligned} C_{k-1} &= C_k + \left(\frac{dC}{dx} \right)_k dx + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2C}{dx^2} \right)_k dx^2 \\ &= C_k + L_k \cdot T_k - \rho \cdot I_{fk} \cdot \omega^2 \cdot \psi_k + \frac{M_{k,\omega^2}}{4} L_k (Y_{k-1} + Y_k) \\ &\quad - \frac{\rho \cdot I_{fk} \cdot L_k \cdot \omega^2}{2 \cdot EI_k} C_k \\ &= \left(1 - \frac{I_{fk} \cdot \rho \cdot L_k \cdot \omega^2}{2 EI_k} \right) C_k + L_k \cdot T_k - \rho I_{fk} \cdot \omega^2 \cdot \psi_k + \\ &\quad + \frac{M_{k,\omega^2} \cdot L_k}{4} (Y_{k-1} + Y_k) \end{aligned}$$

L'angle ψ se déduira d'un développement limité au 3ème ordre, affectant la forme:

$$\begin{aligned} \psi_{k-1} &= \psi_k + \left(\frac{d\psi}{dx} \right)_k dx + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\psi}{dx^2} \right)_k dx^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3\psi}{dx^3} \right)_k dx^3 \\ &= \psi_k + \frac{L_k}{EI_k} C_k + \frac{1}{2EI_k} (L_k^2 \cdot T_k - I_{fk} \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot L_k \cdot \psi_k) + \\ &\quad + \frac{L_k^2}{6EI_k} \left[\frac{M_{k,\omega^2}}{2} (Y_{k-1} + Y_k) - \frac{\rho \cdot I_{fk} \cdot \omega^2}{EI_k} C_k \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{L_k^2}{2EI_k} T_k + \frac{L_k}{EI_k} \left[1 - \frac{\rho \cdot I_{fk} \cdot \omega^2 \cdot L_k}{6EI_k} \right] C_k + \left[1 - \frac{I_{fk} \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot L_k}{2EI_k} \right] \psi_k +$$

$$+ \frac{L_k^2 \cdot M_k \cdot \omega^2}{12EI_k} (Y_{k-1} + Y_k)$$

Nous arrivons à l'évaluation de Y où s'introduisent les deux effets secondaires :

$$Y_{k-1} = Y_k + \left(\frac{dY}{dx} \right)_k dx + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2Y}{dx^2} \right)_k dx^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3Y}{dx^3} \right)_k dx^3 +$$

$$\frac{1}{24} \left(\frac{d^4Y}{dx^4} \right)_k dx^4$$

$$= Y_k + L_k \cdot \psi_k - \frac{L_k \cdot T_k}{K \cdot S_k \cdot G} + \frac{L_k^2 \cdot C_k}{2EI_k} - \frac{L_k}{4K \cdot S_k \cdot G} M_k \cdot \omega^2 (Y_{k-1} + Y_k) +$$

$$+ \frac{L_k^3}{6EI_k} \cdot T_k - \frac{L_k^2 \cdot I_{fk} \cdot \rho \cdot \omega^2}{6EI_k} \psi_k + \frac{M_k \cdot L_k^3 \cdot \omega^2 (Y_{k-1} + Y_k)}{48EI_k} - \frac{I_{fk} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot L_k^3}{24(EI_k)^2} C_k$$

Afin d'alléger les calculs, posons :

$$U_k = 1 + \frac{L_k \cdot M_k \cdot \omega^2}{4} \left(\frac{1}{KS_kG} - \frac{L_k^2}{12EI_k} \right) \quad a_k = \frac{2}{U_k}$$

$$h_k = - \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot I_{fk} \cdot L_k}{2EI_k} \quad b_k = L_k \left(1 + \frac{h_k}{3} \right) \frac{1}{U_k}$$

$$d_k = - \frac{L_k}{U_k} \left(\frac{1}{KS_kG} - \frac{L_k^2}{6EI_k} \right) \quad e_k = \frac{L_k^2}{2EI_k \cdot U_k} \left(1 + \frac{h_k}{6} \right)$$

$$f_k = \frac{M_k \cdot \omega^2}{2} \quad g_k = \frac{f_k \cdot L_k}{2} \quad j_k = \frac{M_k \cdot \omega^2 \cdot L_k^2}{12EI_k}$$

Calculons le groupement $Y_{k-1} + Y_k$

$$Y_{k-1} + Y_k = a_k \cdot Y_k + b_k \cdot \psi_k + d_k \cdot T_k + e_k \cdot C_k$$

La relation relative à la déflexion devient :

$$Y_{k-1} = d_k \cdot T_k + e_k \cdot C_k + b_k \cdot \psi_k + (a_k - 1) Y_k$$

Nous pouvons relier les éléments de réduction d'ordre $k-1$ à ceux d'ordre k :

$$T_{k-1} = (1 + f_k \cdot d_k) T_k + f_k \cdot e_k \cdot C_k + f_k \cdot b_k \cdot \psi_k + f_k \cdot a_k \cdot Y_k$$

$$C_{k-1} = (L_k + g_k \cdot d_k) T_k + (1 + g_k \cdot e_k + h_k) C_k + (g_k \cdot b_k - \rho \cdot I_{fk} \cdot \omega^2) \psi_k + g_k \cdot a_k \cdot Y_k$$

$$\begin{aligned} \psi_{k-1} = & \left(\frac{3j_k}{f_k} + j_k \cdot d_k \right) T_k + \left(\frac{b_k \cdot U_k}{EI_k} + j_k \cdot e_k \right) C_k + \\ & + (1 + h_k + j_k \cdot b_k) \psi_k + j_k \cdot a_k \cdot Y_k \end{aligned}$$

Les éléments de réduction sont alors reliés par une matrice $\boxed{A_k}$ telle que :

$$\begin{bmatrix} T_{k-1} \\ C_{k-1} \\ \psi_{k-1} \\ Y_{k-1} \end{bmatrix} = \boxed{A_k} \begin{bmatrix} T_k \\ C_k \\ \psi_k \\ Y_k \end{bmatrix}$$

et dont les termes constitutifs sont :

$$\begin{array}{l|l} a_{11} = 1 + f_k \cdot d_k & a_{31} = j_k \left(\frac{3}{f_k} + d_k \right) \\ a_{12} = f_k \cdot e_k & a_{32} = \frac{b_k \cdot U_k}{EI_k} + j_k \cdot e_k \\ a_{13} = f_k \cdot b_k & a_{33} = 1 + h_k + j_k \cdot b_k \\ a_{14} = f_k \cdot a_k & a_{34} = j_k \cdot a_k \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} a_{21} = L_k + g_k \cdot d_k & a_{41} = d_k \\ a_{22} = 1 + g_k \cdot e_k + h_k & a_{42} = e_k \\ a_{23} = g_k \cdot b_k - \rho \cdot I_{fk} \cdot \omega^2 & a_{43} = b_k \\ a_{24} = g_k \cdot a_k & a_{44} = a_{k-1} \end{array}$$

III - DETERMINATION D'UNE MATRICE DE TRANSFERT LIEE

A L'EXISTENCE D'UN CHAMP CENTRIFUGE

Les exigences de la technique aéronautique et de la construction des turbomachines nous ont incités à examiner le comportement dynamique d'une verge entraînée dans un mouvement de rotation. Ce cas se distingue des précédents par l'apparition d'un champ centrifuge caractérisé par un vecteur rotation instantané Ω . Nous supposons ce dernier perpendiculaire à l'axe élastique.

Le moment de la force centrifuge de l'élément par rapport au point A est de la forme :

$$\Gamma_A = - \alpha x [Y(x+dx) - Y(x)]$$

L'équilibre des moments au point A entraîne alors la relation :

$$C+dC - C - Tdx - [Y(x+dx) - Y(x)] [Fx + \alpha x] = 0$$

il s'en suit que :

$$dC = Tdx + [Y(x+dx) - Y(x)] (Fx + \alpha x)$$

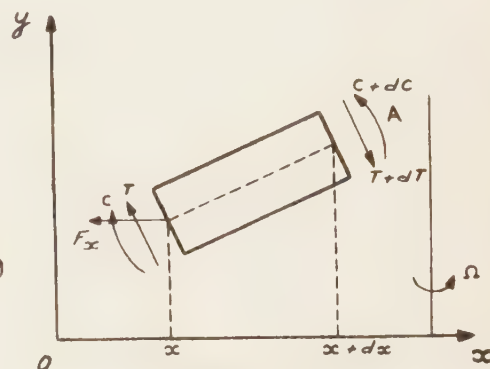


figure 2-3

L'expression de la force centrifuge qui s'applique à la section correspondant à l'abscisse x_k est très facile à calculer. Si l'on a constitué N éléments et si D_n est la distance du milieu de l'un d'eux à l'axe de rotation, on a :

$$F_k = \sum_{n=k+1}^{n=N} \Omega^2 \cdot M_n \cdot D_n$$

En ce qui concerne Γ_A , le calcul effectué pour le k ème élément donne le résultat :

$$\Gamma_A = - M_k \cdot \Omega^2 \left(\frac{D_k}{2} + \frac{L_k}{12} \right) (Y_{k-1} - Y_k)$$

donc

$$\alpha_k = M_k \cdot \Omega^2 \left(\frac{D_k}{2} + \frac{L_k}{12} \right)$$

Il vient alors :

$$T_{k-1} = T_k + \left(\frac{dT}{dx} \right)_k dx = T_k + \frac{M_k \cdot \omega^2}{2} (Y_{k-1} + Y_k)$$

$$\begin{aligned} C_{k-1} &= C_k + \left(\frac{dC}{dx} \right)_k dx + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2C}{dx^2} \right)_k dx^2 \\ &= C_k + L_k \cdot T_k + (Y_{k-1} - Y_k) (F_k + \alpha_k) + \frac{M_k \cdot \omega^2 \cdot L_k}{4} (Y_{k-1} + Y_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{k-1} &= \psi_k + \left(\frac{d\psi}{dx} \right)_k dx + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\psi}{dx^2} \right)_k dx^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3\psi}{dx^3} \right)_k dx^3 \\ &= \psi_k + \frac{L_k}{EI_k} \cdot C_k + \frac{L_k^2}{2EI_k} \cdot T_k + \frac{L_k}{2EI_k} \cdot (F_k + \alpha_k) (Y_{k-1} - Y_k) + \\ &\quad + \frac{M_k \cdot \omega^2 \cdot L_k^2}{12EI_k} (Y_{k-1} + Y_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{k-1} &= Y_k + \left(\frac{dY}{dx} \right)_k dx + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2Y}{dx^2} \right)_k dx^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3Y}{dx^3} \right)_k dx^3 + \\ &\quad + \frac{1}{24} \left(\frac{d^4Y}{dx^4} \right)_k dx^4 \\ &= Y_k + L_k \cdot \psi_k + \frac{L_k^2}{2EI_k} C_k + \frac{L_k^3}{6EI_k} T_k + \frac{L_k^2}{6EI_k} (F_k + \alpha_k) (Y_{k-1} - Y_k) + \\ &\quad + \frac{M_k \cdot \omega^2 \cdot L_k^3}{48EI_k} (Y_{k-1} + Y_k) \end{aligned}$$

Comme d'habitude, nous ferons apparaître une matrice de transfert après avoir posé :

$$h_k = F_k + \alpha_k$$

$$a_k = 1 - \frac{L_k^2}{6EI_k} \cdot h_k - \frac{M_k \cdot \omega^2 \cdot L_k^3}{48EI_k}$$

$$b_k = 1 - \frac{L_k^2}{6EI_k} \cdot h_k + \frac{M_{k,\omega^2} \cdot L_k^3}{48EI_k}$$

$$d_k = \frac{L_k^2}{2EI_k} \quad e_k = \frac{M_{k,\omega^2}}{2}$$

$$p_k = \frac{M_{k,\omega^2} \cdot L_k^3}{24EI_k} \quad q_k = 1 - \frac{L_k^2}{6EI_k} \cdot h_k$$

Compte tenu de nos nouvelles notations, les équations précédentes deviennent :

$$Y_{k-1} = \frac{d_k \cdot L_k}{3a_k} \cdot T_k + \frac{d_k}{a_k} \cdot C_k + \frac{L_k}{a_k} \cdot \psi_k + \frac{b_k}{a_k} \cdot Y_k$$

avec :

$$Y_{k-1} + Y_k = \frac{d_k \cdot L_k}{3a_k} \cdot T_k + \frac{d_k \cdot C_k}{a_k} + \frac{L_k \cdot \psi_k}{a_k} + \frac{2q_k}{a_k} \cdot Y_k$$

$$Y_{k-1} - Y_k = \frac{d_k \cdot L_k}{3a_k} \cdot T_k + \frac{d_k}{a_k} \cdot C_k + \frac{L_k}{a_k} \cdot \psi_k + \frac{p_k}{a_k} \cdot Y_k$$

Pour T_{k-1} , C_{k-1} , ψ_{k-1} , il vient :

$$T_{k-1} = T_k + e_k \left(\frac{d_k \cdot L_k}{3a_k} \cdot T_k + \frac{d_k}{a_k} \cdot C_k + \frac{L_k}{a_k} \cdot \psi_k + \frac{2q_k}{a_k} \cdot Y_k \right)$$

$$T_{k-1} = \left[1 + \frac{d_k \cdot e_k \cdot L_k}{3a_k} \right] T_k + \frac{e_k \cdot d_k}{a_k} \cdot C_k + \frac{e_k \cdot L_k}{a_k} \cdot \psi_k + \frac{2e_k \cdot q_k}{a_k} \cdot Y_k$$

$$C_{k-1} = C_k + L_k \cdot T_k + h_k \left(\frac{d_k \cdot L_k}{3a_k} \cdot T_k + \frac{d_k}{a_k} \cdot C_k + \frac{L_k}{a_k} \cdot \psi_k + \frac{p_k}{a_k} \cdot Y_k \right) + \frac{e_k \cdot L_k}{2} \left(\frac{d_k \cdot L_k}{3a_k} \cdot T_k + \frac{d_k}{a_k} \cdot C_k + \frac{L_k}{a_k} \cdot \psi_k + \frac{2q_k}{a_k} \cdot Y_k \right)$$

$$C_{k-1} = \left(L_k + \frac{h_k \cdot d_k \cdot L_k}{3a_k} + \frac{e_k \cdot d_k \cdot L_k^2}{6a_k} \right) \cdot T_k + \left(1 + \frac{h_k \cdot d_k}{a_k} + \frac{e_k \cdot L_k \cdot d_k}{2a_k} \right) C_k + \left(\frac{h_k \cdot L_k}{a_k} + \frac{e_k \cdot L_k^2}{2a_k} \right) \psi_k + \left(\frac{h_k \cdot p_k}{a_k} + \frac{e_k \cdot L_k \cdot q_k}{a_k} \right) \cdot Y_k$$

$$\begin{aligned}
\psi_{k-1} &= \psi_k + \frac{2d_k}{L_k} \cdot C_k + d_k \cdot T_k + \frac{h_k \cdot d_k}{L_k} \left(\frac{d_k \cdot L_k}{3a_k} \cdot T_k + \frac{d_k}{a_k} \cdot C_k + \right. \\
&\quad \left. + \frac{L_k}{a_k} \cdot \psi_k + \frac{p_k}{a_k} \cdot Y_k \right) + \frac{d_k \cdot e_k}{3} \left(\frac{d_k \cdot L_k}{3a_k} \cdot T_k + \frac{d_k}{a_k} \cdot C_k + \frac{L_k}{a_k} \cdot \psi_k + \frac{2q_k}{a_k} \cdot Y_k \right) \\
\psi_{k-1} &= \left(d_k + \frac{h_k \cdot d_k^2}{3a_k} + \frac{e_k \cdot d_k^2 \cdot L_k}{9a_k} \right) T_k + \left(\frac{2d_k}{L_k} + \frac{h_k \cdot d_k^2}{a_k \cdot L_k} + \frac{e_k \cdot d_k^2}{3a_k} \right) C_k + \\
&\quad + \left(1 + \frac{h_k \cdot d_k}{a_k} + \frac{d_k \cdot e_k \cdot L_k}{3a_k} \right) \psi_k + \left(\frac{p_k \cdot h_k \cdot d_k}{a_k \cdot L_k} + \frac{2d_k \cdot e_k \cdot q_k}{3a_k} \right) Y_k
\end{aligned}$$

La matrice $\boxed{A_k}$ telle que :

$$\begin{pmatrix} T_{k-1} \\ C_{k-1} \\ \psi_{k-1} \\ Y_{k-1} \end{pmatrix} = \boxed{A_k} \begin{pmatrix} T_k \\ C_k \\ \psi_k \\ Y_k \end{pmatrix}$$

a donc comme termes :

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 1 + \frac{d_k \cdot e_k \cdot L_k}{3a_k} & a_{31} &= d_k \left(1 + \frac{h_k \cdot d_k}{3a_k} + \frac{e_k \cdot d_k \cdot L_k}{9a_k} \right) \\
a_{12} &= \frac{e_k \cdot d_k}{a_k} & a_{32} &= d_k + \left(\frac{h_k \cdot d_k}{a_k \cdot L_k} + \frac{d_k \cdot e_k}{3a_k} + \frac{2}{L_k} \right) \\
a_{13} &= \frac{e_k \cdot L_k}{a_k} & a_{33} &= 1 + \frac{h_k \cdot d_k}{a_k} + \frac{d_k \cdot e_k \cdot L_k}{3a_k} \\
a_{14} &= \frac{2e_k \cdot q_k}{a_k} & a_{34} &= \frac{d_k}{a_k} \left(\frac{h_k \cdot p_k}{L_k} + \frac{2e_k \cdot q_k}{3} \right) \\
a_{21} &= L_k \left(1 + \frac{h_k \cdot d_k}{3a_k} + \frac{e_k \cdot d_k \cdot L_k}{6a_k} \right) & a_{41} &= \frac{d_k \cdot L_k}{3a_k} \\
a_{22} &= 1 + \frac{h_k \cdot d_k}{a_k} + \frac{e_k \cdot L_k \cdot d_k}{2a_k} & a_{42} &= \frac{d_k}{a_k} \\
a_{23} &= \frac{L_k}{a_k} \left(h_k + \frac{e_k \cdot L_k}{2} \right) & a_{43} &= \frac{L_k}{a_k}
\end{aligned}$$

$$a_{24} = \frac{1}{a_k} (h_k \cdot p_k + e_k \cdot L_k \cdot q_k) \quad a_{44} = \frac{b_k}{a_k}$$

IV - PULSATIONS NATURELLES

Tous les cas que nous avons passés en revue aboutissent à la mise en évidence d'une matrice de transfert caractéristique d'un élément.

Il nous suffira de multiplier les matrices successives pour constituer la matrice représentant le comportement général d'une verge, c'est-à-dire permettant le calcul des pulsations naturelles et des éléments de réduction correspondants.

$$\begin{vmatrix} T_0 \\ C_0 \\ \psi_0 \\ Y_0 \end{vmatrix} = \boxed{A_1} \dots \boxed{A_k} \dots \boxed{A_n} \begin{vmatrix} T_n \\ C_n \\ \psi_n \\ Y_n \end{vmatrix} = \boxed{B} \begin{vmatrix} T_n \\ C_n \\ \psi_n \\ Y_n \end{vmatrix}$$

Les conditions aux limites permettent alors de déterminer les pulsations naturelles.

Dans le cas d'une verge encastree à une extrémité libre à l'autre, on aura par exemple :

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 0 & T_n &= 0 \\ Y_0 &= 0 & C_n &= 0 \end{aligned}$$

b_{ij} étant le terme général de la matrice produit B.

$$\begin{aligned} \psi_0 &= b_{33} \cdot \psi_n + b_{34} Y_n \\ Y_0 &= b_{43} \cdot \psi_n + b_{44} Y_n \end{aligned}$$

Les pulsations naturelles seront alors données par les valeurs de ω telles que :

$$\begin{vmatrix} b_{33} & b_{34} \\ b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = 0$$

V - EVALUATION DE L'INCERTITUDE PROPRE A NOTRE METHODE

Nous avons calculé de façon exacte, dans le premier chapitre, les pulsations naturelles et les éléments de réduction T, C, ψ , Y de verges prismatiques vibrant en flexion. Notre intention est maintenant de comparer les résultats que nous avons obtenus à ceux déduits de l'application de notre méthode.

A cet effet, nous choisirons une verge prismatique de section rectangulaire dont les éléments sont les suivants :

$$\begin{aligned} E &= 2.10^{11} \\ \rho &= 7,8.10^3 \\ \text{longueur} &= 3.10^{-1} \\ \text{largeur} &= 3.10^{-2} \\ \text{épaisseur} &= 2.10^{-2} \end{aligned}$$

Nous tiendrons successivement compte de l'absence ou de l'existence d'effets secondaires.

1) Cas de la flexion sans effets secondaires

Les valeurs exactes des pulsations naturelles sont données par la formule :

$$\omega_n = \frac{b_n}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

Les résultats du chapitre 1 fournissent la valeur de b_n , il en résulte que :

	$\omega_1(\text{sec}^{-1})$	$\omega_2(\text{sec}^{-1})$	$\omega_3(\text{sec}^{-1})$
EL	1142,12	7157,59	20041,4
EA-LA	5008,38	16230,36	33863
AA	3206,00	12824,00	28854,0
LL-EE	7267,6	20033,5	39273,7

Les résultats obtenus par notre méthode sont liés au nombre d'éléments de découpage. En particulier, pour le premier mode d'une verge encastrée-libre, on obtient :

N	2	3	4	5	6	7	8	9
$\omega_{\text{sec}^{-1}}$	1186,5	1162,0	1153,4	1149,2	1147,2	1145,7	1144,8	1144,4

On évaluera l'incertitude sur ω par le rapport :

$$I = 100 \cdot \frac{\omega_{\text{calculé}} - \omega_{\text{exact}}}{\omega_{\text{exact}}}$$

Nous avons résumé dans un tableau les valeurs numériques des trois premières pulsations naturelles.

	N	$\omega_1(\text{sec}^{-1})$	I ₁	$\omega_2(\text{sec}^{-1})$	I ₂	$\omega_3(\text{sec}^{-1})$	I ₃
EL	10	1143,92	0,15	7296,3	1,9	21121	5,4
	20	1142,58	0,035	7191,7	0,47	20302	1,4
EA	10	5056,64	0,96	16825	3,7	36690	8,2
	20	5020,41	0,24	16376	0,92	34538	1,7
LA	10	5090,70	1,6	17042	4,9	37437	10,3
	20	5028,69	0,40	16425	1,2	34690	2,3
AA	10	3232,57	0,81	13258	3,4	31145	7,4
	20	3212,60	0,18	12930	1,3	29936	1,9
LL	10	7460,81	2,6	21427	7,0	44675	13,8
	20	7314,73	0,64	20364	1,6	40468	3,0
EE	10	7341,87	1,0	20814	3,8	42700	8,8
	20	7296,86	0,41	20226	0,98	40068	2,0

En ce qui concerne le calcul des éléments de réduction, nous avons fixé le nombre de matrices à 20. La configuration envisagée est celle d'une verge encastrée-libre.

Nous avons dressé les tableaux relatifs au premier et au troisième mode pour lesquels les pulsations naturelles étaient les suivantes :

$$\begin{aligned} \omega_1 \text{ exact} &= 1142,12 & \omega_3 \text{ exact} &= 20041 \\ \omega_1 \text{ approché} &= 1142,58 & \omega_3 \text{ approché} &= 20302 \end{aligned}$$

L'abscisse $3 \cdot 10^{-1}$ correspond à l'extrémité encastrée.

RESULTATS RELATIFS AU 1er MODE

$10^2 X$	$10^3 Y$		$10^2 \psi$		$10^{-2} C$		$10^{-2} T$	
	VE	VA	VE	VA	VE	VA	VE	VA
0	5,00	4,986	-2,294	-2,287	0,000	0,0332	0,000	0,4424
1,5	4,655	4,655	-2,293	-2,292	0,0335	0,1303	0,4421	0,8533
3	4,311	4,312	-2,290	-2,290	0,1310	0,2868	0,8527	1,232
4,5	3,968	3,969	-2,283	-2,282	0,2877	0,4979	1,231	1,580
6	3,627	3,627	-2,268	-2,268	0,4990	0,7588	1,579	1,897
7,5	3,288	3,288	-2,245	-2,244	0,7601	1,064	1,896	2,183
9	2,954	2,954	-2,211	-2,210	1,066	1,411	2,182	2,439
10,5	2,626	2,626	-2,164	-2,164	1,413	1,794	2,437	2,665
12	2,305	2,305	-2,104	-2,104	1,796	2,209	2,663	2,862
13,5	1,995	1,995	-2,029	-2,029	2,210	2,651	2,860	3,032
15	1,697	1,697	-1,938	-1,938	2,652	3,116	3,029	3,174
16,5	1,414	1,414	-1,830	-1,830	3,118	3,601	3,171	3,292
18	1,149	1,149	-1,704	-1,704	3,603	4,102	3,288	3,386
19,5	0,9043	0,9045	-1,559	-1,559	4,103	4,616	3,382	3,459
21	0,6824	0,6825	-1,396	-1,386	4,616	5,139	3,455	3,512
22,5	0,4864	0,4865	-1,213	-1,213	5,139	5,668	3,508	3,549
24	0,3193	0,3194	-1,010	-1,011	5,668	6,202	3,545	3,572
25,5	0,1841	0,1842	-0,7883	-0,7884	6,202	6,739	3,567	3,584
27	0,08386	0,08382	-0,5456	-0,5458	6,738	7,277	3,579	3,589
28,5	0,02147	0,02147	-0,2829	-0,2829	7,275		3,584	
30	0,0	0,0	0,0		7,813		3,585	

RESULTATS RELATIFS AU 3ème MODE

10 ² X	10 ³ Y		10 ² ψ		10 ⁻³ C		10 ⁻⁵ T	
	VE	VA	VE	VA	VE	VA	VE	VA
0	5,000		-1,308		0,00		0,00	
1,5	3,04	3,56	-1,29	-1,43	0,919	1,27	1,13	1,05
3	1,14	1,45	-1,22	-1,30	3,12	3,13	1,72	1,75
4,5	-0,579	-0,422	-1,05	-1,10	5,82	5,88	1,79	1,82
6	-1,97	-1,89	-0,789	-0,819	8,28	8,34	1,42	1,45
7,5	-2,90	-2,86	-0,444	-0,467	9,93	9,99	0,724	0,749
9	-3,28	-3,27	-0,059	-0,075	10,3	10,4	-0,162	-0,149
10,5	-3,09	-3,09	0,316	0,305	9,43	9,52	-1,07	-1,08
12	-2,36	-2,38	0,631	0,626	7,21	7,30	-1,85	-1,88
13,5	-1,24	-1,26	0,844	0,844	3,99	4,07	-2,37	-2,41
15	0,098	0,079	0,925	0,928	0,269	0,329	-2,53	-2,58
16,5	1,45	1,44	0,865	0,871	-3,41	-3,38	-2,31	-2,36
18	2,62	2,62	0,676	0,683	-6,49	-6,49	-1,73	-1,78
19,5	3,44	3,44	0,391	0,398	-8,47	-8,51	-0,866	-0,902
21	3,78	3,79	0,051	0,063	-9,01	-9,07	0,163	0,145
22,5	3,62	3,64	-0,264	-0,262	-7,97	-8,05	1,21	1,22
24	3,02	3,04	-0,519	-0,520	-5,41	-5,49	2,16	2,18
25,5	2,12	2,14	-0,654	-0,658	-1,58	-1,64	2,89	2,93
27	1,14	1,15	-0,627	-0,632	3,13	3,11	3,35	3,41
28,5	0,334	0,339	-0,413	-0,417	8,34	8,40	3,55	3,63
30	0,0		0,0		13,7		3,58	

2) Cas de la flexion avec effets secondaires

Les données complémentaires sont : $K = 2/3$,
 $\sigma = 0,3$. On voit que les pulsations naturelles exactes découlent de

$$\omega_n = \frac{b_n \cdot \alpha_n}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad \alpha_n < 1$$

Les valeurs de α_n ont été calculées (1er chapitre) pour le cas actuel et ont conduit aux divers modes.

	$b_1 \alpha_1$	$\omega_1(\text{sec}^{-1})$	$b_2 \alpha_2$	$\omega_2(\text{sec}^{-1})$	$b_3 \alpha_3$	$\omega_3(\text{sec}^{-1})$
EL	3,50129	1137,34	21,4148	6956,32	57,8224	18782,7
EA	15,0933	4902,86	47,2637	15352,9	94,1903	30596,4
LA	15,2171	4943,09	47,9204	15566,6	95,9315	31162,0
AA	9,78263	3177,70	38,1497	12392,5	82,5602	26818,5
LL	21,9833	7140,96	58,6676	19057,3	110,109	35767,3
EE	21,5703	7006,82	56,9405	18496,3	105,995	34431,0

En particulier, pour le premier mode d'une verge encastrée-libre.

N	2	3	4	5	6	7	8	9
$\omega_{\text{sec}^{-1}}$	1121,4	1132,0	1135,1	1135,5	1136,1	1136,5	1136,7	1136,9

Plus généralement

N	$\omega_1(\text{sec}^{-1})$	I_1	$\omega_2(\text{sec}^{-1})$	I_2	$\omega_3(\text{sec}^{-1})$	I_3
10	1136,95	0,035	6994,6	0,54	19138,2	1,8
20	1137,25	0,01	6966,4	0,14	1888	0,53
10	4926,09	0,41	15622	1,8	31785	3,9
20	4908,84	0,16	15425	0,48	30925	1,1
10	4966,79	0,46	15840	1,7	32364	3,9
20	4949,29	0,12	15642	0,49	31507	1,1
10	3190,81	0,44	12595	1,6	27811	3,7
20	3181,06	0,11	12445	0,42	27089	1
10	7177,57	0,52	19420	1,9	37214	4,2
20	7150,85	0,14	19160	0,52	36199	1,4
10	7041,48	0,51	18835	1,8	35807	3,9
20	7016,01	0,14	18591	0,51	34827	1,1

Comme précédemment, nous chercherons les éléments de réduction à partir de 20 matrices et nous nous intéresserons au 1er et au 3ème mode pour lesquels les pulsations naturelles sont :

$$\omega_1 \text{ exact} = 1137,34$$

$$\omega_{3\text{exact}} = 18782$$

$$\omega_1 \text{ approché} = 1137,25$$

$$\omega_3 \text{ approché} = 18881$$

RESULTATS RELATIFS AU 1er MODE

10 ² X	10 ³ Y		10 ² ψ		10 ⁻² C		10 ⁻³ T	
	VE	VA	VE	VA	VE	VA	VE	VA
0	5,000	5,003	-2,282	-2,284	0,000	0,0339	0,000	0,4384
1,5	4,657	4,657	-2,282	-2,282	0,0339	0,1313	0,4384	0,8457
3	4,314	4,314	-2,279	-2,279	0,1313	0,2875	0,8458	1,22
4,5	3,972	3,972	-2,271	-2,271	0,2875	0,4977	1,222	1,567
6	3,632	3,632	-2,257	-2,257	0,4978	0,7574	1,567	1,881
7,5	3,924	3,924	-2,233	-2,233	0,7576	1,062	1,881	2,165
9	2,960	2,960	-2,199	-2,199	1,062	1,407	2,165	2,419
10,5	2,633	2,633	-2,153	-2,152	1,407	1,787	2,419	2,644
12	2,313	2,313	-2,093	-2,093	1,788	2,200	2,644	2,840
13,5	2,003	2,003	-2,019	-2,019	2,200	2,639	2,840	3,008
15	1,705	1,705	-1,928	-1,928	2,640	3,102	3,008	3,150
16,5	1,422	1,422	-1,820	-1,820	3,102	3,584	3,150	3,267
18	1,157	1,157	-1,695	-1,695	3,585	4,082	3,267	3,361
19,5	0,9116	0,9116	-1,551	-1,551	4,082	4,593	3,361	3,434
21	0,6892	0,6892	-1,389	-1,389	4,593	5,112	3,433	3,487
22,5	0,4925	0,4925	-1,207	-1,207	5,113	5,539	3,487	3,525
24	0,256	0,256	-1,005	-1,005	5,639	6,170	3,524	3,548
25,5	0,1884	0,1884	-0,7842	-0,7842	6,170	6,703	3,547	3,560
27	0,0869	0,0869	-0,5428	-0,5428	6,703	7,238	3,559	3,565
28,5	0,0230	0,0230	-0,2814	-0,2814	7,237		3,564	
30	0	0	0	0	7,772		3,564	

RESULTATS RELATIFS AU 3ème MODE

10 ² X	10 ³ Y		10 ² ψ		10 ⁻³ C		10 ⁻⁵ T	
	VE	VA	VE	VA	VE	VA	VE	VA
0	5,000	3,03	-1,260	-1,24	0,914	0,79	1,00	1,04
1,5	3,08	1,16	-1,17	-1,18	2,97	2,96	1,53	1,55
3	1,19	-0,57	-1,019	-1,02	5,47	5,49	1,60	1,62
4,5	-0,54	-2,00	-0,769	-0,771	7,76	7,80	1,28	1,30
6	-1,96	-2,97	-0,446	-0,446	9,31	9,37	0,671	0,677
7,5	-2,93	-3,38	-0,084	-0,082	9,76	9,82	-0,118	0,119
9	-3,34	-3,21	0,270	0,274	8,95	0,01	-0,939	-0,945
10,5	-3,18	-2,50	0,571	0,578	6,95	7,00	-1,64	-1,66
12	-2,47	-1,37	0,780	0,788	4,03	4,05	-2,13	-2,14
13,5	-1,35	0,002	0,867	0,876	0,59	0,59	-2,30	-2,31
15	0,006	1,40	0,824	0,833	-2,86	-2,86	-2,12	-2,14
16,5	1,40	2,64	0,661	0,668	-5,74	-5,79	-1,62	-1,63
18	2,62	3,52	0,406	0,410	-7,67	-7,74	-0,854	-0,862
19,5	3,49	3,92	0,102	0,104	-8,29	-8,36	-0,071	-0,069
21	3,89	3,82	-0,197	-0,198	-7,45	-7,53	1,03	1,04
22,5	3,79	3,26	-0,439	-0,442	-5,20	-5,26	1,91	1,92
24	3,23	2,37	-0,572	-0,577	1,74	1,76	2,60	2,63
25,5	2,34	1,35	-0,558	-0,564	2,59	2,60	3,06	3,09
27	1,34	0,46	-0,371	-0,375	7,42	7,49	3,28	3,32
28,5	0,46							
30								

VI - EXEMPLES D'EXTENSION DE CALCUL

a) Nous avons tenu à appliquer notre méthode au cas d'une verge ayant un profil quelconque. La forme que nous avons adoptée est caractérisée par la figure ; les dimensions sont les suivantes :

$$\begin{aligned} a &= 4,927 \cdot 10^{-2} \\ b &= 3,969 \cdot 10^{-2} \\ c &= 1,980 \cdot 10^{-2} \\ d &= 1,5009 \cdot 10^{-1} \\ f &= 1,4994 \cdot 10^{-1} \\ \text{Epaisseur} &= 4,2 \cdot 10^{-3} \\ \rho &= 4,2 \cdot 10^{-3} \\ E &= 1,99 \cdot 10^{11} \end{aligned}$$



figure 2-4

Les trois premières pulsations naturelles trouvées expérimentalement ont pour valeur :

$$\begin{aligned} \omega_1(\text{sec}^{-1}) &= 306,1 \\ \omega_2(\text{sec}^{-1}) &= 1631 \\ \omega_3(\text{sec}^{-1}) &= 4325 \end{aligned}$$

Les calculs effectués à l'aide de 10 et de 20 matrices ont donné pour ω_1 , ω_2 , ω_3 , les valeurs suivantes :

N	10	20
$\omega_1(\text{sec}^{-1})$	306,6	306,8
$\omega_2(\text{sec}^{-1})$	1656	1638
$\omega_3(\text{sec}^{-1})$	—	4387

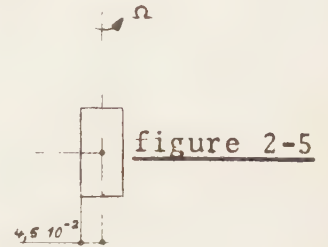
A titre documentaire, le calcul de ω_1 limité au cas de quatre matrices a donné la valeur $304,6(\text{sec}^{-1})$ déjà très proche du résultat expérimental.

En ce qui concerne les effets secondaires, la nature des problèmes actuels incite à les négliger. Il est à remarquer que le calcul, dans le cas de la pulsation naturelle du troisième mode, en prenant 20 matrices, a donné comme résultat 4338 sec^{-1} , donc une valeur plus proche du résultat.

b) Un autre exemple a été fourni par une expérience de verge prismatique rectangulaire en rotation.

Les caractéristiques actuelles sont :

longueur = $2,802 \cdot 10^{-1}$
 largeur = $4 \cdot 10^{-2}$
 épaisseur = $4,1 \cdot 10^{-3}$
 $\rho = 7,80 \cdot 10^{-3}$
 $E = 2,01 \cdot 10^{11}$



Pour une vitesse de rotation $162,6 \text{ rad/sec.}$, nous avons trouvé expérimentalement $329,3 (\text{sec}^{-1})$, pour le premier mode.

Les résultats théoriques ont été les suivants :

N	5	10	20	30
$\omega (\text{sec}^{-1})$	334	332,7	332,5	332,4

L'écart entre la valeur théorique et la détermination expérimentale est de l'ordre de $1, \%$.

CHAPITRE 3

DETERMINATION DES PULSATIONS NATURELLES
DE FLEXION TORSION (13)

Nous nous proposons de prévoir les pulsations naturelles d'une verge continue vibrant en flexion-torsion.

Les chapitres précédents nous ont appris à tenir compte des effets secondaires dont on a vu l'influence apparaître sur les modes supérieurs. Il est raisonnable d'admettre que pour les problèmes qui vont nous occuper maintenant, il en sera de même. En tout état de cause, nos calculs sont entachés d'une imprécision inhérente à la détermination de l'axe élastique. L'introduction des effets secondaires n'aurait dans ces conditions qu'une signification limitée, aussi, nous les négligerons.

Nous garderons les notations antérieures et chercherons à mettre en évidence la matrice de transfert reliant les nouveaux éléments de réduction qui sont au nombre de six.

T_k , effort tranchant
 C_k , moment fléchissant
 ψ_k , angle de la tangente à la déformée avec la position statique de l'axe élastique prise comme axe des x ,
 Y_k , élongation verticale,
 Γ_k , couple de torsion
 θ_k , angle de torsion autour de l'axe élastique.

Référons-nous à deux hypothèses :

L'élongation du milieu de l'élément sera assimilée à la demi-somme des élongations extrêmes.

L'angle de torsion du milieu de l'élément sera supposé égal à la demi-somme des angles repérant les extrémités.

Utilisons les équations (1-49) et (1-50), ainsi que les hypothèses proposées, il vient :

$$\frac{\rho \cdot S_k \cdot \omega^2 \cdot L_k (Y_{k-1} + Y_k)}{2} + \frac{\rho \cdot S_k \cdot l_k \cdot L_k \cdot \omega^2 \cdot (\theta_{k-1} + \theta_k)}{2}$$

$$= \frac{\omega^2}{2} [M_k (Y_{k-1} + Y_k) + M_k \cdot l_k (\theta_{k-1} + \theta_k)]$$

illustrant la variation d'effort tranchant.

En ce qui concerne les variations des couples de torsion, l'équation (1-50) nous amène à :

$$- \frac{I \theta_k \cdot \omega^2 \cdot (\theta_{k-1} + \theta_k)}{2} - \frac{\rho \cdot S_k \cdot L_k \cdot l_k \cdot \omega^2 \cdot (Y_{k-1} + Y_k)}{2}$$

$$= - \frac{\omega^2}{2} [I \theta_k (\theta_{k-1} + \theta_k) + M_k \cdot l_k (Y_{k-1} + Y_k)]$$

Posons alors :

$$\left(\frac{dT}{dx} \right)_k dx = \frac{\omega^2}{2} [M_k (Y_{k-1} + Y_k) + M_k \cdot l_k (\theta_{k-1} + \theta_k)] \quad (3-1)$$

$$\left(\frac{d\tau}{dx} \right)_k dx = - \frac{\omega^2}{2} [I \theta_k (\theta_{k-1} + \theta_k) + M_k \cdot l_k (Y_{k-1} + Y_k)] \quad (3-2)$$

Comme dans le cas de la flexion, nous effectuerons des développements limites des grandeurs T , C , ψ , Y , τ , θ , permettant ainsi de déterminer la matrice de transfert reliant les variables d'ordre $k-1$ aux variables d'ordre k .

I-DETERMINATION D'UNE MATRICE DE TRANSFERT EN FLEXION TORSION

D'une façon analogue à celle du chapitre précédent, nous avons traité les équations relatives à T , C , ψ , Y , τ , θ (nous utiliserons les équations (1-1), (1-15), (1-16), (1-17) (3-1) et (3-2)).

$$\begin{aligned}
T_{k-1} &= T_k + \left(\frac{dT}{dx} \right)_k dx \\
&= T_k + \frac{\omega^2}{2} \left[M_k(Y_{k-1} + Y_k) + M_k \cdot l_k (\theta_{k-1} + \theta_k) \right] \\
C_{k-1} &= C_k + \left(\frac{dC}{dx} \right)_k dx + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2C}{dx^2} \right)_k dx^2 \\
&= C_k + L_k \cdot T_k + \frac{L_k \cdot \omega^2}{4} \left[M_k(Y_{k-1} + Y_k) + M_k \cdot l_k (\theta_{k-1} + \theta_k) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{k-1} &= \psi_k + \left(\frac{d\psi}{dx} \right)_k dx + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\psi}{dx^2} \right)_k dx^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3\psi}{dx^3} \right)_k dx^3 \\
&= \psi_k + \frac{L_k \cdot C_k}{EI_k} + \frac{L_k^2 \cdot T_k}{2EI_k} + \frac{L_k^2}{6EI_k} \cdot \left(\frac{dT}{dx} \right)_k dx \\
&= \psi_k + \frac{L_k \cdot C_k}{EI_k} + \frac{L_k \cdot T_k^2}{2EI_k} + \frac{\omega^2 L_k^2}{12EI_k} \left[M_k(Y_{k-1} + Y_k) + \right. \\
&\quad \left. + M_k \cdot l_k (\theta_{k-1} + \theta_k) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{k-1} &= Y_k + \left(\frac{dY}{dx} \right)_k dx + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2Y}{dx^2} \right)_k dx^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3Y}{dx^3} \right)_k dx^3 + \\
&\quad + \frac{1}{24} \left(\frac{d^4Y}{dx^4} \right)_k dx^4 \\
&= Y_k + L_k \cdot \psi_k + \frac{L_k^2}{2EI_k} \cdot C_k + \frac{L_k^3}{6EI_k} \cdot T_k + \frac{L_k^3}{24EI_k} \left(\frac{dT}{dx} \right)_k dx \\
&= Y_k + L_k \cdot \psi_k + \frac{L_k^2}{2EI_k} \cdot C_k + \frac{L_k^3}{6EI_k} \cdot T_k + \frac{L_k^3 \omega^2}{48EI_k} \left[M_k(Y_{k-1} + Y_k) \right. \\
&\quad \left. + M_k \cdot l_k (\theta_{k-1} + \theta_k) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{k-1} &= T_k + \left(\frac{dT}{dx} \right)_k dx \\
&= T_k - \frac{\omega^2}{2} \left[I \theta_k (\theta_{k-1} + \theta_k) + M_k \cdot l_k (Y_{k-1} + Y_k) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{k-1} &= \theta_k + \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_k dx + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} \right)_k dx^2 \\
&= \theta_k + \frac{L_k \cdot T_k}{GJ_k} - \frac{\omega^2 \cdot L_k}{4GJ_k} \left[I \theta_k (\theta_{k-1} + \theta_k) + M_k \cdot l_k (Y_{k-1} + Y_k) \right]
\end{aligned}$$

Le processus d'élimination permettant de relier les variables d'ordre $k-1$ aux variables d'ordre k doit débiter par la détermination de $\theta_{k-1} + \theta_k$ et de $Y_{k-1} + Y_k$. Nous mettrons ces expressions sous une forme commode permettant d'alléger les développements de T_{k-1} , C_{k-1} , ψ_{k-1} , Γ_{k-1} .

$$\theta_{k-1} + \theta_k = 2\theta_k + \frac{L_k}{GJ_k} \cdot T_k - \frac{\omega^2 \cdot L_k}{4GJ_k} \left(I\theta_k(\theta_{k-1} + \theta_k) + M_k \cdot \ell_k(Y_{k-1} + Y_k) \right)$$

$$(\theta_{k-1} + \theta_k) \left(1 + \frac{\omega^2 \cdot I\theta_k \cdot L_k}{4GJ_k} \right) = 2\theta_k + \frac{L_k}{GJ_k} \cdot T_k - \frac{\omega^2 \cdot L_k \cdot M_k \cdot \ell_k}{4GJ_k} (Y_{k-1} + Y_k)$$

En posant :

$$a_k = 1 + \frac{\omega^2 \cdot I\theta_k \cdot L_k}{4GJ_k}$$

L'équation précédente prend la forme :

$$\theta_{k-1} + \theta_k = \frac{2\theta_k}{a_k} + \frac{L_k \cdot T_k}{a_k \cdot GJ_k} - \frac{\omega^2 \cdot L_k \cdot \ell_k \cdot M_k}{4a_k \cdot GJ_k} (Y_{k-1} + Y_k)$$

Etudions maintenant la somme $Y_{k-1} + Y_k$:

$$Y_{k-1} + Y_k = 2Y_k + L_k \cdot \psi_k + \frac{L_k^2}{2EI_k} \cdot C_k + \frac{L_k^3}{6EI_k} \cdot T_k + \frac{L_k^3 \omega^2}{48EI_k} \left[\dots \right]$$

$$\left[M_k(Y_{k-1} + Y_k) + M_k \cdot \ell_k \left(\frac{2\theta_k}{a_k} + \frac{L_k \cdot T_k}{a_k \cdot GJ_k} - \frac{\omega^2 \cdot L_k \cdot \ell_k \cdot M_k}{4a_k \cdot GJ_k} (Y_{k-1} + Y_k) \right) \right]$$

$$(Y_{k-1} + Y_k) \left(1 - \frac{L_k^3 \cdot \omega^2 \cdot M_k}{48EI_k} \left(1 - \frac{M_k \cdot \ell_k^2 \cdot \omega^2 \cdot L_k}{4a_k \cdot GJ_k} \right) \right) = 2Y_k + L_k \cdot \psi_k +$$

$$+ \frac{L_k^2}{2EI_k} \cdot C_k + \frac{L_k^3}{6EI_k} \cdot T_k + \frac{M_k \cdot \ell_k \cdot L_k^3 \cdot \omega^2}{24a_k \cdot EI_k} \cdot \theta_k + \frac{M_k \cdot \ell_k \cdot L_k^4 \cdot \omega^2 \cdot \Gamma_k}{48a_k \cdot EI_k \cdot GJ_k}$$

posons maintenant :

$$b_k = 1 - \frac{L_k^3 \cdot \omega^2 \cdot M_k}{48EI_k} \left(1 - \frac{M_k \cdot \ell_k^2 \cdot \omega^2 \cdot L_k}{4a_k \cdot GJ_k} \right)$$

$$A_k = \frac{2}{b_k} \quad , \quad B_k = \frac{L_k}{b_k} \quad , \quad D_k = \frac{L_k^3}{6b_k \cdot EI_k} \quad , \quad E_k = \frac{M_k \cdot \ell_k \cdot L_k^3 \cdot \omega^2}{24a_k \cdot b_k \cdot EI_k}$$

$$F_k = \frac{E_k \cdot L_k}{2GJ_k} \quad , \quad G_k = \frac{L_k^2}{2b_k \cdot EI_k}$$

Il reste alors :

$$Y_{k-1} + Y_k = \frac{2}{b_k} Y_k + \frac{L_k}{b_k} \psi_k + \frac{L_k^2}{2b_k \cdot EI_k} C_k + \frac{L_k^3}{6b_k \cdot EI_k} T_k +$$

$$+ \frac{M_k \cdot \ell_k \cdot L_k^3 \cdot \omega^2}{24a_k \cdot b_k \cdot EI_k} \theta_k + \frac{M_k \cdot \ell_k \cdot L_k^4 \cdot \omega^2}{48a_k \cdot b_k \cdot EI_k \cdot GJ_k} \Gamma_k$$

$$Y_{k-1} + Y_k = A_k \cdot Y_k + B_k \cdot \psi_k + C_k \cdot G_k + D_k \cdot T_k + E_k \cdot \theta_k + F_k \cdot \Gamma_k$$

En particulier :

$$Y_{k-1} = (A_k - 1) Y_k + B_k \cdot \psi_k + G_k \cdot C_k + D_k \cdot T_k + E_k \cdot \theta_k + F_k \cdot \Gamma_k$$

Cette dernière expression nous incite à poser à nouveau :

$$H_k = - \frac{\omega^2 \cdot L_k \cdot M_k \cdot \ell_k}{4a_k \cdot GJ_k}$$

$$U_k = \frac{2}{a_k} + H_k \cdot E_k \quad \quad Q_k = H_k \cdot D_k$$

$$N_k = H_k \cdot B_k \quad \quad R_k = H_k \cdot A_k$$

$$P_k = H_k \cdot G_k \quad \quad S_k = H_k \cdot F_k + \frac{L_k}{a_k \cdot GJ_k}$$

En définitive, on aboutit à :

$$\theta_{k-1} = (U_k - 1) \theta_k + N_k \cdot \psi_k + P_k \cdot C_k + Q_k \cdot T_k + R_k \cdot Y_k + S_k \cdot \Gamma_k$$

Nous pouvons alors rechercher les équations déterminant T_{k-1} , C_{k-1} , ψ_{k-1} , Γ_{k-1} . Ce calcul ne présente aucune difficulté et nous nous abstenons de commentaire.

$$T_{k-1} = \left[1 + \frac{\omega^2 \cdot M_k}{2} (D_k + \ell_k \cdot Q_k) \right] T_k + \frac{\omega^2 \cdot M_k}{2} (A_k + \ell_k \cdot R_k) Y_k +$$

$$+ \frac{\omega^2 \cdot M_k}{2} (B_k + \ell_k \cdot N_k) \psi_k + \frac{\omega^2 \cdot M_k}{2} (G_k + \ell_k \cdot P_k) C_k +$$

$$+ \frac{\omega^2 \cdot M_k}{2} (E_k + \ell_k \cdot U_k) \theta_k + \frac{\omega^2 \cdot M_k}{2} (F_k + \ell_k \cdot S_k) \Gamma_k$$

$$C_{k-1} = C_k + L_k \cdot T_k + \frac{M_k \cdot L_k \cdot \omega^2}{4} (A_k \cdot Y_k + B_k \cdot \psi_k + G_k \cdot C_k + D_k \cdot T_k + \\ + E_k \cdot \theta_k + F_k \cdot \Gamma_k) + \frac{M_k \cdot L_k \cdot \omega^2 \cdot \ell_k}{4} (U_k \cdot \theta_k + N_k \cdot \psi_k + P_k \cdot C_k + \\ + Q_k \cdot T_k + R_k \cdot Y_k + S_k \cdot \Gamma_k)$$

$$C_{k-1} = \left[1 + \frac{M_k \cdot L_k \cdot \omega^2 (G_k + \ell_k \cdot P_k)}{4} \right] C_k + \left[L_k + \frac{M_k \cdot L_k \cdot \omega^2 (D_k + \ell_k \cdot Q_k)}{4} \right] T_k + \\ + \frac{M_k \cdot L_k \cdot \omega^2}{4} (A_k + \ell_k \cdot R_k) Y_k + \frac{M_k \cdot L_k \cdot \omega^2}{4} (B_k + \ell_k \cdot N_k) \psi_k + \\ + \frac{M_k \cdot L_k \cdot \omega^2}{4} (E_k + \ell_k \cdot U_k) \theta_k + \frac{M_k \cdot L_k \cdot \omega^2}{4} (F_k + \ell_k \cdot S_k) \Gamma_k$$

$$\psi_{k-1} = \psi_k + \frac{L_k \cdot C_k}{EI_k} + \frac{L_k^2 \cdot T_k}{2EI_k} + \frac{\omega^2 \cdot L_k^2 \cdot M_k}{12EI_k} (A_k \cdot Y_k + B_k \cdot \psi_k + \\ + G_k \cdot C_k + D_k \cdot T_k + E_k \cdot \theta_k + F_k \cdot \Gamma_k) + \frac{\omega^2 \cdot L_k^2 \cdot M_k \cdot \ell_k}{12EI_k} (U_k \cdot \theta_k + \\ N_k \cdot \psi_k + P_k \cdot C_k + Q_k \cdot T_k + R_k \cdot Y_k + S_k \cdot \Gamma_k)$$

$$= \left[1 + \frac{\omega^2 \cdot L_k^2 \cdot M_k}{12EI_k} (B_k + \ell_k \cdot N_k) \right] \psi_k + \left[\frac{L_k}{EI_k} + \frac{\omega^2 \cdot L_k^2 \cdot M_k (G_k + \ell_k \cdot P_k)}{12EI_k} \right] C_k$$

$$+ \left[\frac{L_k^2}{2EI_k} + \frac{\omega^2 \cdot L_k^2 \cdot M_k}{12EI_k} (D_k + \ell_k \cdot Q_k) \right] T_k + \frac{\omega^2 \cdot L_k^2 \cdot M_k}{12EI_k} (A_k + \ell_k \cdot R_k) Y_k +$$

$$\frac{\omega^2 \cdot L_k^2 \cdot M_k}{12EI_k} (E_k + \ell_k \cdot U_k) \theta_k + \frac{\omega^2 \cdot L_k^2 \cdot M_k}{12EI_k} (F_k + \ell_k \cdot S_k) \Gamma_k$$

$$\Gamma_{k-1} = \Gamma_k - \frac{\omega^2}{2} \left[I_{\theta k} (\theta_{k-1} + \theta_k) + M_k \cdot \ell_k (Y_{k-1} + Y_k) \right] \\ = \Gamma_k - \frac{\omega^2 \cdot I_{\theta k}}{2} [U_k \cdot \theta_k + N_k \cdot \psi_k + P_k \cdot C_k + Q_k \cdot T_k + R_k \cdot Y_k + \\ + S_k \cdot \Gamma_k] - \frac{\omega^2}{2} M_k \cdot \ell_k [A_k \cdot Y_k + B_k \cdot \psi_k + G_k \cdot C_k + D_k \cdot T_k + E_k \cdot \theta_k + \\ + F_k \cdot \Gamma_k]$$

$$\begin{aligned}
T_{k-1} = & \left[1 - \frac{\omega^2 \cdot I_{\theta k} \cdot S_k}{2} - \frac{\omega^2}{2} M_k \cdot \ell_k \cdot F_k \right] T_k - \frac{\omega^2}{2} (I_{\theta k} \cdot U_k + \\
& + M_k \cdot \ell_k \cdot E_k) \theta_k - \frac{\omega^2}{2} (I_{\theta k} \cdot N_k + M_k \cdot \ell_k \cdot B_k) \psi_k - \frac{\omega^2}{2} (I_{\theta k} \cdot P_k + \\
& + M_k \cdot \ell_k \cdot G_k) C_k - \frac{\omega^2}{2} (I_{\theta k} \cdot Q_k + M_k \cdot \ell_k \cdot D_k) T_k - \frac{\omega^2}{2} (I_{\theta k} \cdot R_k + \\
& + M_k \cdot \ell_k \cdot A_k) Y_k
\end{aligned}$$

En définitive, la matrice A_k se compose des termes a_{ij} :

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 1 + Z_k (D_k + \ell_k \cdot Q_k) \\
a_{12} &= Z_k (G_k + \ell_k \cdot P_k) \\
a_{13} &= Z_k (B_k + \ell_k \cdot N_k) \\
a_{14} &= Z_k (A_k + \ell_k \cdot R_k) \\
a_{15} &= Z_k (F_k + \ell_k \cdot S_k) \\
a_{16} &= Z_k (E_k + \ell_k \cdot U_k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{41} &= D_k \\
a_{42} &= G_k \\
a_{43} &= B_k \\
a_{44} &= A_{k-1} \\
a_{45} &= F_k \\
a_{46} &= E_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{21} &= L_k + W_k (D_k + \ell_k \cdot Q_k) \\
a_{22} &= 1 + W_k (G_k + \ell_k \cdot P_k) \\
a_{23} &= W_k (B_k + \ell_k \cdot N_k) \\
a_{24} &= W_k (A_k + \ell_k \cdot R_k) \\
a_{25} &= W_k (F_k + \ell_k \cdot S_k) \\
a_{26} &= W_k (E_k + \ell_k \cdot U_k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{51} &= - \omega^2 (I_{\theta k} \cdot Q_k + M_k \cdot \ell_k \cdot D_k) / 2 \\
a_{52} &= - \omega^2 (I_{\theta k} \cdot P_k + M_k \cdot \ell_k \cdot G_k) / 2 \\
a_{53} &= - \omega^2 (I_{\theta k} \cdot N_k + M_k \cdot \ell_k \cdot B_k) / 2 \\
a_{54} &= - \omega^2 (I_{\theta k} \cdot R_k + M_k \cdot \ell_k \cdot A_k) / 2 \\
a_{55} &= + 1 - \omega^2 (I_{\theta k} \cdot S_k + M_k \cdot \ell_k \cdot F_k) / 2 \\
a_{56} &= - \omega^2 (I_{\theta k} \cdot U_k + M_k \cdot \ell_k \cdot E_k) / 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{31} &= L_k^2 / 2EI_k + X_k (D_k + \ell_k \cdot Q_k) \\
a_{32} &= L_k / EI_k + X_k (G_k + \ell_k \cdot P_k) \\
a_{33} &= 1 + X_k (B_k + \ell_k \cdot N_k) \\
a_{34} &= X_k (A_k + \ell_k \cdot R_k) \\
a_{35} &= X_k (F_k + \ell_k \cdot S_k) \\
a_{36} &= X_k (E_k + \ell_k \cdot U_k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{61} &= Q_p \\
a_{62} &= P_k \\
a_{63} &= N_k \\
a_{64} &= R_k \\
a_{65} &= S_k \\
a_{66} &= U_{k-1}
\end{aligned}$$

Il est bon de rappeler que nous avons posé :

$$a_k = 1 + \frac{\omega^2 \cdot I_{\theta k} \cdot L_k}{4GJ_k} \quad b_k = 1 - \frac{L_k^3 \cdot \omega^2 \cdot M_k}{48EI_k} \left(1 - \frac{\ell_k^2 \cdot M_k \cdot \omega^2 \cdot L_k}{4a_k GJ_k} \right)$$

$$A_k = \frac{2}{b_k}$$

$$U_k = \frac{2}{a_k} + H_k \cdot E_k$$

$$B_k = \frac{L_k}{b_k}$$

$$N_k = H_k \cdot B_k$$

$$G_k = \frac{L_k^2}{2b_k EI_k}$$

$$P_k = H_k \cdot G_k$$

$$D_k = \frac{L_k^3}{6b_k EI_k}$$

$$Q_k = H_k \cdot D_k$$

$$E_k = \frac{M_k \cdot l_k \cdot L_k^3 \cdot \omega^2}{24a_k b_k EI_k}$$

$$R_k = H_k \cdot A_k$$

$$F_k = \frac{E_k \cdot L_k}{2GJ_k}$$

$$S_k = H_k \cdot F_k + \frac{L_k}{a_k GJ_k}$$

$$H_k = - \frac{\omega^2 \cdot L_k \cdot M_k \cdot l_k}{4a_k GJ_k}$$

$$Z_k = \frac{\omega^2 \cdot M_k}{2}$$

$$W_k = \frac{M_k \cdot L_k \cdot \omega^2}{4}$$

$$X_k = \frac{\omega^2 \cdot L_k^2 \cdot M_k}{12EI_k}$$

II - CALCUL DES PULSATIONS NATURELLES

Il est possible, comme lors de l'étude des phénomènes de flexion, de déterminer une matrice B telle que :

$$\begin{vmatrix} T_0 \\ C_0 \\ \psi_0 \\ Y_0 \\ \Gamma_0 \\ \theta_0 \end{vmatrix} = \boxed{A_1} \quad \boxed{A_k} \quad \dots \quad \boxed{A_n} \begin{vmatrix} T_n \\ C_n \\ \psi_n \\ Y_n \\ \Gamma_n \\ \theta_n \end{vmatrix} = \boxed{B} \begin{vmatrix} T_n \\ C_n \\ \psi_n \\ Y_n \\ \Gamma_n \\ \theta_n \end{vmatrix}$$

Les pulsations naturelles sont liées aux conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \psi &= Y = \theta = 0 \text{ pour une extrémité encastree} \\ T &= C = \Gamma = 0 \text{ pour une extrémité libre} \end{aligned}$$

Une verge de type encastrée-libre sera donc telle que :

$$\begin{array}{ll} \psi_0 = 0 & T_n = 0 \\ Y_0 = 0 & C_n = 0 \\ \theta_0 = 0 & r_n = 0 \end{array}$$

B_{ij} étant le terme général de la matrice B, on aura immédiatement :

$$\begin{array}{lll} \psi_n = B_{33} & \psi_n + B_{34} & Y_n + B_{36} \theta_n \\ Y_n = B_{43} & \psi_n + B_{44} & Y_n + B_{46} \theta_n \\ \theta_n = B_{63} & \psi_n + B_{64} & Y_n + B_{66} \theta_n \end{array}$$

Les pulsations naturelles seront alors celles qui annulent le déterminant D, tel que :

$$D = \begin{vmatrix} B_{33} & B_{34} & B_{36} \\ B_{43} & B_{44} & B_{46} \\ B_{63} & B_{64} & B_{66} \end{vmatrix}$$

III - COMPARAISON DES RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX

Reprenons l'exemple traité au chapitre 1 par les méthodes classiques. Nous avons effectué les calculs en nous référant à la définition de l'axe élastique proposée par Trefftz. Le tableau ci-joint permettra la comparaison des résultats que nous avons obtenus à ceux de la méthode rigoureuse développée au chapitre I pour laquelle nous rappelons que :

$$\begin{array}{ll} \omega_1(\text{sec}^{-1}) & = 989,08 \\ \omega_2(\text{sec}^{-1}) & = 6170,0 \\ \omega_3(\text{sec}^{-1}) & = 16621 \end{array}$$

Les calculs effectués pour 10 et 20 matrices ont montré que l'on avait :

N	10	20
$\omega_1(\text{sec}^{-1})$	990,65	989,46
$\omega_2(\text{sec}^{-1})$	6317	6226,6
$\omega_3(\text{sec}^{-1})$	16659	16631

Nous avons étudié une verge encastrée-libre ayant la forme et les caractéristiques suivantes :

$$a = 1,1894 \cdot 10^{-1}$$

$$b = 3,1 \cdot 10^{-2}$$

$$c = 3 \cdot 10^{-1}$$

$$d = 3,837 \cdot 10^{-2}$$

$$\text{Epaisseur} = 4,29 \cdot 10^{-3}$$

$$\rho = 7,84 \cdot 10^3$$

$$E = 2,02 \cdot 10^{11}$$

$$G = 7,91 \cdot 10^{10}$$

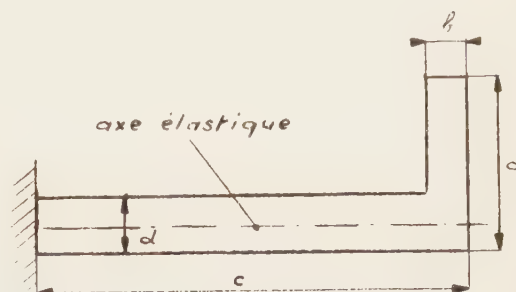


figure 3-1

Après avoir déterminé expérimentalement l'axe élastique, nous avons trouvé pour le fondamental :

N	10	20
$\omega_1(\text{sec}^{-1})$	184,15	184,05

Expérimentalement, $\omega_1(\text{sec}^{-1}) = 183,7$.

CHAPITRE 4

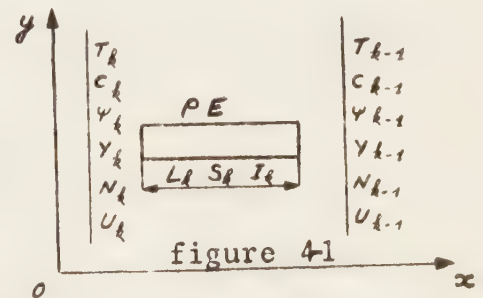
APPLICATION DES MATRICES DE TRANSFERT A L'ETUDE DES TREILLIS

Les pulsations naturelles des treillis sont généralement étudiées à partir de la méthode des matrices de forces ou de déplacements (14-15). Ici nous allons chercher à appliquer à ce calcul la méthode des matrices de transfert.

Tout d'abord nous nous proposons de déterminer une matrice de transfert d'un élément et des matrices relatives à des assemblages particuliers. Ensuite, nous comparerons des résultats théoriques déduits de ces matrices à ceux obtenus par la méthode des matrices de forces et de déplacements ainsi qu'aux résultats expérimentaux.

I - DETERMINATION D'UNE MATRICE DE TRANSFERT D'UN ELEMENT

Entre le mouvement de flexion caractérisé par T , C , ψ , Y et le mouvement longitudinal caractérisé par N et U , il n'y a pas de couplage. La matrice reliant T_k , C_k , ψ_k , Y_k et T_{k-1} , C_{k-1} , ψ_{k-1} , Y_{k-1} est déjà déterminée (ch. II)



Déterminons une matrice de transfert reliant N_k , U_k et N_{k-1} , U_{k-1} . Entre N et U on a :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{N}{ES}$$

L'application du principe fondamental de la dynamique à un élément dx entraîne :

$$(\rho S dx) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} dx$$

En régime stationnaire de la forme $U = U(x) e^{j\omega t}$, les deux relations deviennent :

$$\frac{dU}{dx} = \frac{N}{ES}$$

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = - \frac{\rho}{E} \omega^2 U$$

Comme dans les chapitres II et III lors de l'étude des pulsations naturelles de flexion et de flexion-torsion, nous allons effectuer un développement de N et de U .

$$\begin{aligned} N_{k-1} &= N_k + \left(\frac{dN}{dx} \right)_k dx + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 N}{dx^2} \right)_k dx^2 \\ &= N_k - \rho S_k L_k \omega^2 U_k - \frac{\rho L_k^2 \omega^2}{2E} N_k \\ &= \left(1 - \frac{\rho L_k^2 \omega^2}{2E} \right) N_k - \rho S_k L_k \omega^2 U_k \end{aligned}$$

Pour U on obtient :

$$\begin{aligned} U_{k-1} &= U_k + \left(\frac{dU}{dx} \right)_k dx + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 U}{dx^2} \right)_k dx^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3 U}{dx^3} \right)_k dx^3 \\ &= U_k + \frac{L_k}{ES_k} N_k - \frac{\rho L_k^2 \omega^2}{2E} U_k - \frac{\rho L_k^3 \omega^2}{6E^2 S_k} N_k \\ &= \left(1 - \frac{\rho L_k^2 \omega^2}{2E} \right) U_k + \frac{L_k}{ES_k} \left(1 - \frac{\rho L_k^2 \omega^2}{6E} \right) N_k \end{aligned}$$

d'où la matrice de transfert du mouvement longitudinal

$$\begin{vmatrix} N_{k-1} \\ U_{k-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\rho L_k^2 \omega^2}{2E} & -\rho S_k L_k \omega^2 \\ \frac{L_k}{ES_k} \left(1 - \frac{\rho L_k^2 \omega^2}{6E} \right) & 1 - \frac{\rho L_k^2 \omega^2}{2E} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} N_k \\ U_k \end{vmatrix}$$

La matrice de transfert déterminant le mouvement longitudinal et le mouvement de flexion est alors :

$$\begin{vmatrix} T_{k-1} \\ C_{k-1} \\ \psi_{k-1} \\ Y_{k-1} \\ N_{k-1} \\ U_{k-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{deL}{3a} & \frac{ed}{a} & \frac{eL}{a} & \frac{2e}{a} & 0 & 0 \\ L \left(1 + \frac{deL}{6a} \right) & 1 + \frac{deL}{2a} & \frac{eL^2}{2a} & \frac{eL}{a} & 0 & 0 \\ d \left(1 + \frac{deL}{9a} \right) & d \left(\frac{2}{L} + \frac{de}{3a} \right) & 1 + \frac{deL}{3a} & \frac{2de}{3a} & 0 & 0 \\ \frac{Ld}{3a} & \frac{d}{a} & \frac{L}{a} & \frac{b}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{\rho L^2 \omega^2}{2E} & -\rho S L \omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{ES} \left(1 - \frac{\rho L^2 \omega^2}{6E} \right) & 1 - \frac{\rho L^2 \omega^2}{2E} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_k \\ C_k \\ \psi_k \\ Y_k \\ N_k \\ U_k \end{vmatrix} = \boxed{A_k} \begin{vmatrix} T_k \\ C_k \\ \psi_k \\ Y_k \\ N_k \\ U_k \end{vmatrix}$$

où l'on a, par simplification d'écriture, supprimé les indices k, et où a, b, d, e, ont été définis au chapitre II.

Si une poutre a une section droite constante, il est à remarquer que le mouvement de flexion et le mouvement longitudinal sont tels que :

$$\begin{aligned} Y &= A \sin \sqrt{\beta} x + B \cos \sqrt{\beta} x + C \operatorname{sh} \sqrt{\beta} x + D \operatorname{ch} \sqrt{\beta} x \\ U &= E \sin \gamma x + F \cos \gamma x \end{aligned}$$

$$\text{avec } \beta^2 = \frac{\rho S \omega^2}{EI}, \quad \gamma = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

Dans le cas de la flexion, nous pouvons calculer A B C D en fonction des valeurs de T C ψ Y à une extrémité. Supposons qu'en x=0 on ait T₀ C₀ ψ_0 Y₀, ceci entraîne la détermination de A B C D et celle des T_L, C_L, ψ_L , Y_L. Les calculs étant effectués, il vient :

$$\begin{vmatrix} T_L \\ C_L \\ \psi_L \\ Y_L \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\beta} L + \cos \sqrt{\beta} L}{2} & \frac{\sqrt{\beta} (\operatorname{sh} \sqrt{\beta} L - \sin \sqrt{\beta} L)}{2} & \frac{EI \beta (\operatorname{ch} \sqrt{\beta} L - \cos \sqrt{\beta} L)}{2} & \frac{EI \beta \sqrt{\beta} (\operatorname{sh} \sqrt{\beta} L + \sin \sqrt{\beta} L)}{2} \\ \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\beta} L + \sin \sqrt{\beta} L}{2 \sqrt{\beta}} & \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\beta} L + \cos \sqrt{\beta} L}{2} & \frac{EI \sqrt{\beta} (\operatorname{sh} \sqrt{\beta} L - \sin \sqrt{\beta} L)}{2} & \frac{EI \beta (\operatorname{ch} \sqrt{\beta} L - \cos \sqrt{\beta} L)}{2} \\ \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\beta} L - \cos \sqrt{\beta} L}{2 EI \beta} & \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\beta} L + \sin \sqrt{\beta} L}{2 EI \sqrt{\beta}} & \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\beta} L + \cos \sqrt{\beta} L}{2} & \frac{\sqrt{\beta} (\operatorname{sh} \sqrt{\beta} L - \sin \sqrt{\beta} L)}{2} \\ \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\beta} L - \sin \sqrt{\beta} L}{2 EI \beta \sqrt{\beta}} & \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\beta} L - \cos \sqrt{\beta} L}{2 EI \beta} & \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\beta} L + \sin \sqrt{\beta} L}{2 \sqrt{\beta}} & \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\beta} L + \cos \sqrt{\beta} L}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_0 \\ C_0 \\ \psi_0 \\ Y_0 \end{vmatrix}$$

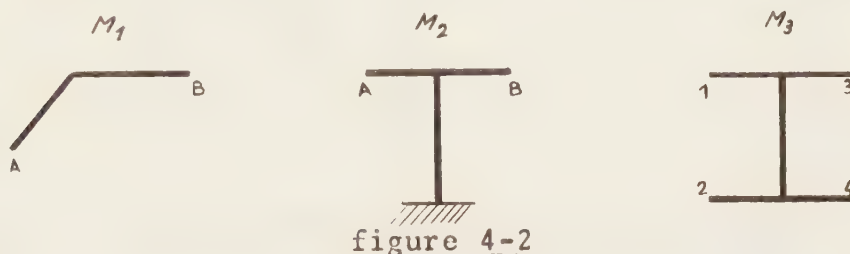
Dans le cas du mouvement longitudinal, on obtiendrait :

$$\begin{vmatrix} N_L \\ U_L \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \gamma L & -ES \gamma \sin \gamma L \\ \frac{\sin \gamma L}{ES \gamma} & \cos \gamma L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} N_0 \\ U_0 \end{vmatrix}$$

Les deux matrices que l'on vient de déterminer relient alors $T_L \ C_L \ \psi_L \ Y_L \ N_L \ U_L$ à $T_0 \ C_0 \ \psi_0 \ Y_0 \ N_0 \ U_0$.

La suite des calculs dans ce chapitre sera effectuée en supposant que les poutres ont des sections droites variables.

Afin de poursuivre l'étude des treillis, nous allons déterminer les matrices de transfert précisées par les figures suivantes :



II - DETERMINATION DES MATRICES DE TRANSFERT M_1, M_2, M_3

La détermination de la matrice de transfert M_1 est classique. Les matrices M_2 et M_3 ont été déterminées en régime statique (16).

1) Matrice de transfert M_1

La matrice de transfert M_1 sera déduite de l'égalité des déplacements et de l'équilibre des forces et du moment des forces agissant sur le coin.

$$\begin{aligned} C_A - C_B &= 0 \\ N_B - T_A \sin \theta + N_A \cos \theta &= 0 \\ T_B + T_A \cos \theta + N_A \sin \theta &= 0 \\ \psi_A &= \psi_B \\ Y_B = U_A \sin \theta - Y_A \cos \theta \\ U_B &= -U_A \cos \theta - Y_A \sin \theta \end{aligned}$$

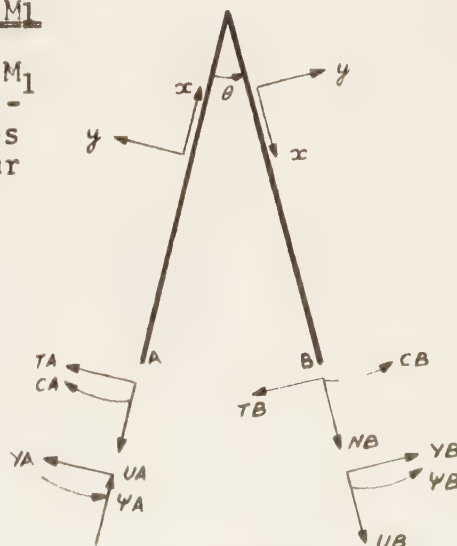


figure 4-3

$$\begin{vmatrix} T_B \\ C_B \\ \psi_B \\ Y_B \\ N_B \\ U_B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\cos \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \theta & 0 & \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & 0 & 0 & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & 0 & -\cos \theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_A \\ C_A \\ \psi_A \\ Y_A \\ N_A \\ U_A \end{vmatrix} = \boxed{M_1} \begin{vmatrix} T_A \\ C_A \\ \psi_A \\ Y_A \\ N_A \\ U_A \end{vmatrix}$$

2) Matrice de transfert M₂

La matrice $\boxed{M_2}$ est telle que

$$\begin{vmatrix} T_B \\ C_B \\ \psi_B \\ Y_B \\ N_B \\ U_B \end{vmatrix} = \boxed{M_2} \begin{vmatrix} T_A \\ C_A \\ \psi_A \\ Y_A \\ N_A \\ U_A \end{vmatrix}$$

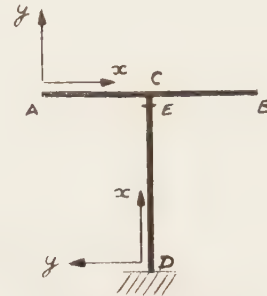


figure 4-4

Tout d'abord intéressons-nous à la partie DE (E étant très près du point C). Par suite des conditions aux limites en D, on peut déterminer T_E , C_E , N_E en fonction de ψ_E , Y_E , U_E .

Nous utiliserons ensuite les relations déduites de l'égalité des déplacements et de l'annulation des forces et du moment des forces relatif à A, B, E.

L'élément C, E, D, peut se représenter de la façon suivante :

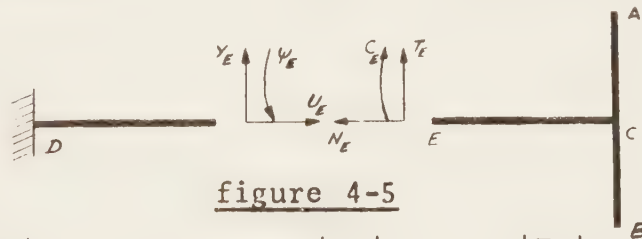


figure 4-5

On a

$$\begin{vmatrix} T_E \\ C_E \\ \psi_E \\ Y_E \\ N_E \\ U_E \end{vmatrix} = \boxed{A_1} \dots \boxed{A_n} \begin{vmatrix} T_D \\ C_D \\ \psi_D \\ Y_D \\ N_D \\ U_D \end{vmatrix} = \boxed{B} \begin{vmatrix} T_D \\ C_D \\ \psi_D \\ Y_D \\ N_D \\ U_D \end{vmatrix}$$

B est de terme général b_{ij}

Dans le cas auquel nous nous intéressons plus particulièrement, on a :

$$\begin{aligned} \psi_D &= 0 & \text{d'où} & \psi_E = b_{31} T_D + b_{32} C_D + b_{35} N_D \\ Y_D &= 0 & Y_E &= b_{41} T_D + b_{42} C_D + b_{45} N_D \\ U_D &= 0 & U_E &= b_{61} T_D + b_{62} C_D + b_{65} N_D \end{aligned}$$

La forme de la matrice A entraîne :

$$b_{35} = b_{45} = b_{61} = b_{62} = 0$$

Les deux premières relations conduisent à

$$C_D = \frac{\psi_E - b_{31} T_D}{b_{32}}$$

$$Y_E = b_{41} T_D + b_{42} \frac{(\psi_E - b_{31} T_D)}{b_{32}}$$

d'où

$$T_D = \frac{b_{32}}{b_{41} b_{32} - b_{42} b_{31}} Y_E - \frac{b_{42}}{b_{41} b_{32} - b_{42} b_{31}} \psi_E$$

On a immédiatement l'expression de C_D et, en définitive :

$$\begin{vmatrix} T_D \\ C_D \\ N_D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-b_{42}}{b_{41} b_{32} - b_{42} b_{31}} & \frac{b_{32}}{b_{41} b_{32} - b_{42} b_{31}} & 0 \\ \frac{b_{41}}{b_{41} b_{32} - b_{42} b_{31}} & \frac{-b_{31}}{b_{41} b_{32} - b_{42} b_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b_{65}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_E \\ Y_E \\ U_E \end{vmatrix}$$

Il vient alors :

$$\begin{vmatrix} T_E \\ C_E \\ \psi_E \\ Y_E \\ N_E \\ U_E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 \\ b_{41} & b_{42} & 0 \\ 0 & 0 & b_{55} \\ 0 & 0 & b_{65} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_D \\ C_D \\ N_D \end{vmatrix} = \boxed{C} \begin{vmatrix} \psi_E \\ Y_E \\ U_E \end{vmatrix}$$

Avec

$$\boxed{C} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c_{53} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{et } c_{11} = \frac{b_{41} b_{12} - b_{42} b_{11}}{b_{41} b_{32} - b_{42} b_{31}}$$

$$c_{12} = \frac{b_{11} b_{32} - b_{12} b_{31}}{b_{41} b_{32} - b_{42} b_{31}}$$

$$c_{21} = \frac{b_{22} b_{41} - b_{42} b_{21}}{b_{41} b_{32} - b_{42} b_{31}}$$

$$c_{22} = \frac{b_{21} b_{32} - b_{31} b_{22}}{b_{41} b_{32} - b_{42} b_{31}}$$

$$c_{53} = b_{55}/b_{65}$$

Etudions alors l'équilibre de A, B, E, il vient :

$$C_B - C_E - C_A = 0$$

$$T_B - T_A + N_E = 0$$

$$N_B - N_A - T_E = 0$$

$$\psi_B = \psi_A$$

$$Y_B = Y_A$$

$$U_B = U_A$$

d'autre part :

$$U_E = Y_A$$

$$\psi_E = \psi_A$$

$$Y_E = -U_A$$

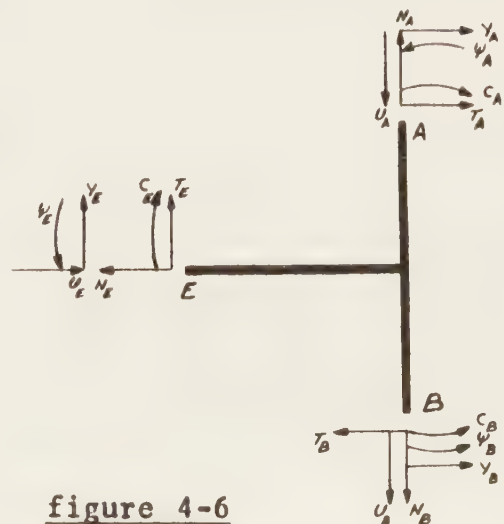


figure 4-6

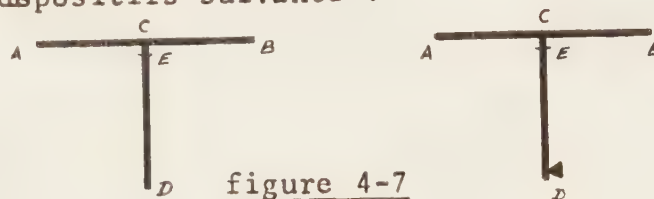
d'où

$$\begin{vmatrix} T_E \\ C_E \\ N_E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{53} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_A \\ Y_A \\ U_A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & 0 & -c_{12} \\ c_{21} & 0 & -c_{22} \\ 0 & c_{53} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_A \\ Y_A \\ U_A \end{vmatrix}$$

La matrice de transfert sera alors définie par :

$$\begin{vmatrix} T_B \\ C_B \\ \psi_B \\ Y_B \\ N_B \\ U_B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -c_{53} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_{21} & 0 & 0 & -c_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{11} & 0 & 1 & -c_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_A \\ C_A \\ \psi_A \\ Y_A \\ N_A \\ U_A \end{vmatrix} = \boxed{M_2} \begin{vmatrix} T_A \\ C_A \\ \psi_A \\ Y_A \\ N_A \\ U_A \end{vmatrix}$$

Il serait facile d'étudier les matrices de transfert relatives aux dispositifs suivants :



où l'extrémité D serait alors libre ou appuyée.

Les modifications interviendraient lors de l'étude de la branche DE lorsque l'on relie T_E , C_E , ψ_E , Y_E , N_E , U_E à ψ_E , Y_E , U_E car les conditions aux limites en D seraient évidemment modifiées. Il serait possible d'étudier des matrices de transfert pour des éléments analogues aux précédents, mais tels que AC et CB ne soient pas perpendiculaires à CD. Les modifications de calcul apparaîtraient dans l'expression des conditions d'équilibre de ABE.

3) Matrice de transfert M3

La matrice de transfert M_3 reliera les valeurs de T, C, ψ, Y, N, U , aux points (3) et (4) à celles aux points (1) et (2).

Comme lors de la détermination de la matrice M_2 , nous allons nous intéresser initialement à la branche DC, D et C étant infiniment proches de E et F.

Le système de forces de moments et de déplacements est représenté sur le schéma ci-contre.

Afin d'alléger les calculs, nous poserons :

$$|I| = \begin{vmatrix} \psi \\ Y \\ U \end{vmatrix} \quad |V| = \begin{vmatrix} T \\ C \\ N \end{vmatrix}$$

A partir de la matrice de transfert A déterminée au début du chapitre, il est possible d'obtenir la matrice B reliant les points C et D.

Nous allons cependant modifier la position des lignes de B et introduire une matrice E telle que :

$$\begin{vmatrix} \psi_D \\ Y_D \\ U_D \\ T_D \\ C_D \\ N_D \end{vmatrix} = [E] \begin{vmatrix} \psi_C \\ Y_C \\ U_C \\ T_C \\ C_C \\ N_C \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad [E] = \begin{vmatrix} [E_1] & [E_2] \\ [E_3] & [E_4] \end{vmatrix}$$

$$[E_1] = \begin{vmatrix} b_{33} & b_{34} & 0 \\ b_{43} & b_{44} & 0 \\ 0 & 0 & b_{66} \end{vmatrix}$$

$$[E_3] = \begin{vmatrix} b_{13} & b_{14} & 0 \\ b_{23} & b_{24} & 0 \\ 0 & 0 & b_{56} \end{vmatrix}$$

$$[E_2] = \begin{vmatrix} b_{31} & b_{32} & 0 \\ b_{41} & b_{42} & 0 \\ 0 & 0 & b_{65} \end{vmatrix}$$

$$[E_4] = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{55} \end{vmatrix}$$

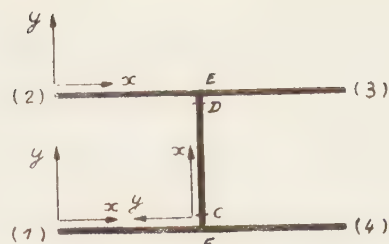


figure 4-1

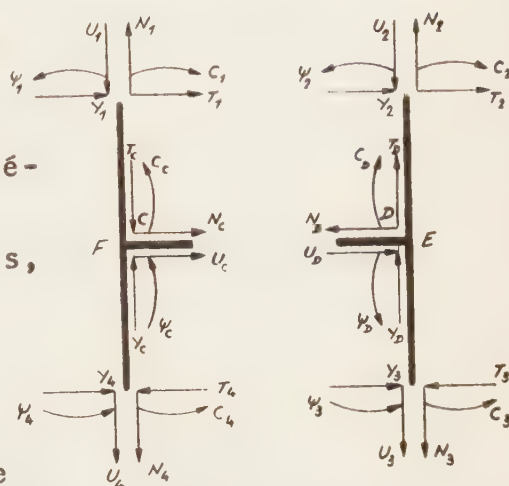


figure 4-9

La relation matricielle où intervient la matrice E, peut se mettre sous la forme :

$$\begin{vmatrix} I_D \\ V_D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{E_1} & \boxed{E_2} \\ \boxed{E_3} & \boxed{E_4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_C \\ V_C \end{vmatrix}$$

qui développée, devient :

$$\begin{vmatrix} I_D \\ V_D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{E_1} \\ \boxed{E_3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boxed{E_2} \\ \boxed{E_4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_C \end{vmatrix}$$

On peut donc déduire V_D et V_C en fonction de $|I_D|$ et $|I_C|$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} V_C \end{vmatrix} &= \boxed{E_2}^{-1} \begin{vmatrix} I_D \end{vmatrix} - \boxed{E_2}^{-1} \boxed{E_1} \begin{vmatrix} I_C \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} V_D \end{vmatrix} &= \boxed{E_3} \begin{vmatrix} I_C \end{vmatrix} + \boxed{E_4} \left(\boxed{E_2}^{-1} \begin{vmatrix} I_D \end{vmatrix} - \boxed{E_2}^{-1} \boxed{E_1} \begin{vmatrix} I_C \end{vmatrix} \right) \\ \begin{vmatrix} V_D \end{vmatrix} &= \boxed{E_4} \boxed{E_2}^{-1} \begin{vmatrix} I_D \end{vmatrix} + \left(\boxed{E_3} - \boxed{E_4} \boxed{E_2}^{-1} \boxed{E_1} \right) \begin{vmatrix} I_C \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Or, on a :

$$\boxed{E_2}^{-1} = \begin{vmatrix} b_{42.\alpha} & -b_{32.\alpha} & 0 \\ -b_{41.\alpha} & b_{31.\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1/b_{65} \end{vmatrix}$$

Avec $\alpha = 1/(b_{31} b_{42} - b_{41} b_{32})$, si de plus on pose :

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha(b_{33} b_{42} - b_{32} b_{43}) \\ \gamma &= \alpha(b_{42} b_{34} - b_{32} b_{44}) \\ \delta &= \alpha(b_{31} b_{43} - b_{33} b_{41}) \\ \epsilon &= \alpha(b_{44} b_{31} - b_{41} b_{34}) \end{aligned}$$

il vient :

$$\boxed{E_2}^{-1} \boxed{E_1} = \begin{vmatrix} \beta & \gamma & 0 \\ \delta & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & b_{66}/b_{65} \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_4 \\ E_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11}\beta + b_{12}\delta & b_{11}\gamma + b_{12}\epsilon & 0 \\ b_{21}\beta + b_{22}\delta & b_{21}\gamma + b_{22}\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b_{55} \cdot b_{66}}{b_{65}} \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_4 \\ E_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} \alpha(b_{11}b_{42} - b_{12}b_{41}) & \alpha(b_{31}b_{12} - b_{32}b_{11}) & 0 \\ \alpha(b_{21}b_{42} - b_{41}b_{22}) & \alpha(b_{31}b_{22} - b_{32}b_{21}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b_{55}}{b_{65}} \end{vmatrix}$$

Les différentes matrices étant explicitées, il s'agit de relier les variables ψ , Y , U aux points D et C à celles des points (1) et (2).

$$\begin{aligned} \psi_D &= \psi_2 & \psi_C &= \psi_1 \\ Y_D &= -U_2 & Y_C &= -U_1 \\ U_D &= Y_2 & U_C &= Y_1 \end{aligned}$$

d'où

$$|I_D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_2 \\ Y_2 \\ U_2 \end{vmatrix} \quad |I_C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_1 \\ Y_1 \\ U_1 \end{vmatrix}$$

et

$$|V_C| = \begin{vmatrix} T_C \\ C_C \\ N_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{42}\alpha & -b_{32}\alpha & 0 \\ -b_{41}\alpha & b_{31}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1/b_{65} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_2 \\ Y_2 \\ U_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta & \gamma & 0 \\ \delta & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b_{66}}{b_{65}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_1 \\ Y_1 \\ U_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_{42}\alpha & 0 & b_{32}\alpha & -\beta & 0 & \gamma \\ -b_{41}\alpha & 0 & -b_{31}\alpha & -\delta & 0 & \epsilon \\ 0 & 1/b_{65} & 0 & 0 & -\frac{b_{66}}{b_{65}} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_2 \\ Y_2 \\ U_2 \\ \psi_1 \\ Y_1 \\ U_1 \end{vmatrix}$$

$$|V_D| = \begin{vmatrix} T_D \\ C_D \\ N_D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{13}-b_{11}\beta-b_{12}\delta & b_{14}-b_{11}\gamma-b_{12}\epsilon & 0 \\ b_{23}-b_{21}\beta-b_{22}\delta & b_{24}-b_{21}\gamma-b_{22}\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b_{56}b_{65}-b_{55}b_{66}}{b_{65}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_1 \\ Y_1 \\ U_1 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \alpha(b_{11}b_{42}-b_{12}b_{41}) & \alpha(b_{31}b_{12}-b_{32}b_{11}) & 0 \\ \alpha(b_{21}b_{42}-b_{41}b_{22}) & \alpha(b_{31}b_{22}-b_{32}b_{21}) & 0 \\ 0 & 0 & b_{55}/b_{65} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_2 \\ Y_2 \\ U_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha(b_{11}b_{42}-b_{12}b_{41}) & 0 & -\alpha(b_{31}b_{12}-b_{32}b_{11}) & b_{13}-b_{11}\beta-b_{12}\delta \\ \alpha(b_{21}b_{42}-b_{41}b_{22}) & 0 & -\alpha(b_{31}b_{22}-b_{32}b_{21}) & b_{32}-b_{21}\beta-b_{22}\delta \\ 0 & b_{55}/b_{65} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -(b_{14}-b_{11}\gamma-b_{12}\epsilon) \\ 0 & -(b_{24}-b_{21}\gamma-b_{22}\epsilon) \\ \frac{b_{56}b_{65}-b_{55}b_{66}}{b_{65}} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_2 \\ Y_2 \\ U_2 \\ \psi_1 \\ Y_1 \\ U_1 \end{vmatrix}$$

Tenons alors compte des conditions d'équilibre

$$\begin{aligned} C_3 &= C_2 + C_D & C_4 &= C_1 - C_C \\ T_3 &= T_2 - N_D & T_4 &= T_1 + N_C \\ N_3 &= N_2 + T_D & N_4 &= N_1 - T_C \end{aligned}$$

et nous aurons

$$\begin{vmatrix} T_3 \\ C_3 \\ \psi_3 \\ Y_3 \\ N_3 \\ U_3 \\ T_4 \\ C_4 \\ \psi_4 \\ Y_4 \\ N_4 \\ U_4 \end{vmatrix} = \boxed{M_3} \begin{vmatrix} T_2 \\ C_2 \\ \psi_2 \\ Y_2 \\ N_2 \\ U_2 \\ T_1 \\ C_1 \\ \psi_1 \\ Y_1 \\ N_1 \\ U_1 \end{vmatrix}$$

avec $\boxed{M_3}$ de terme général m_{ij}
 $i = j = 1, 2$

les $m_{ii} = 1$, les $m_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ exceptés :

$$m_{14} = \frac{-b_{55}}{b_{65}} ; m_{1,10} = \frac{-(b_{65}b_{56} - b_{55}b_{66})}{b_{65}}$$

$$m_{23} = \alpha(b_{21} b_{42} - b_{41} b_{22}) ; m_{26} = -\alpha(b_{31} b_{22} - b_{32} b_{21})$$

$$m_{29} = b_{23} - b_{21}\beta - b_{22}\delta ; m_{2,12} = -(b_{24} - b_{21}\gamma - b_{22}\epsilon)$$

$$m_{53} = \alpha(b_{11} b_{42} - b_{12} b_{41}) ; m_{56} = -\alpha(b_{31} b_{12} - b_{32} b_{11})$$

$$m_{59} = b_{13} - b_{11}\beta - b_{12}\delta ; m_{5,12} = -(b_{14} - b_{11}\gamma - b_{12}\epsilon)$$

$$m_{74} = 1/b_{65} ; m_{7,10} = -b_{66}/b_{65}$$

$$m_{83} = b_{41}\alpha ; m_{86} = b_{31}\alpha ; m_{89} = \delta ; m_{8,12} = -\epsilon$$

$$m_{11,3} = -b_{42}\alpha ; m_{11,6} = -b_{32}\alpha ; m_{11,9} = \beta ; m_{11,12} = -\gamma$$

4) Extension des résultats précédents

Des matrices de raideur, Pestel (17) a déduit des matrices de transfert rectangulaires dans le cas où le nombre de vecteurs d'états n'est pas constant. Un ensemble d'équations linéaires était alors associé aux matrices de transfert.

L'étude directe des matrices de transfert peut être faite sans passer par l'intermédiaire des matrices de raideur. Afin de préciser, intéressons-nous au schéma suivant représentant un ensemble de poutres.

A représente le noeud, point de jonction des poutres. Déterminons ce qui se passe au point 4 sur la branche IV.

Par suite des diverses conditions aux limites, on peut déterminer en (1), (2), (3), les variables $|V| = |T \ C \ N|^T$ en fonction de variables $|I| = |\psi \ y \ u|^T$ pour chaque poutre (cf détermination de la matrice M_2).

On aura alors :



$|V_1|$ et $|I_1|$ en fonction de $|I_1|$, $|V_2|$ et $|I_2|$ en fonction de $|I_2|$

L'équilibre du noeud entraînera par exemple une relation du type :

$$|V_4| = |\alpha_1| |V_1| + |\alpha_2| |V_2| + |\alpha_3| |V_3|$$

$$= |\beta_1| |I_1| + |\alpha_2| |I_2| + |\alpha_3| |I_3|$$

Par suite de l'égalité des déplacements on peut exprimer $|I_1|$, $|I_2|$, $|I_3|$ en fonction de $|I_4|$ et on a une relation du type :

$$\begin{vmatrix} V_4 \\ I_4 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ I \end{bmatrix} |I_4| \quad \text{I matrice unité}$$

Au point L (extrémité libre par exemple) on aurait

$$\begin{vmatrix} V_L \\ I_L \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ I \end{bmatrix} |I_4|$$

Les conditions aux limites conduisant à 3 relations linéaires entre ψ_4 , Y_4 , U_4 , l'annulation du déterminant correspondant fournira les pulsations naturelles.

III - COMPARAISON DES RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX

Nous avons vérifié expérimentalement ou par calcul, les résultats déduits de la matrice de transfert d'un élément $\begin{bmatrix} A_k \end{bmatrix}$ et des matrices particulières $\begin{bmatrix} M_1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} M_2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} M_3 \end{bmatrix}$.

a) Il est apparu intéressant de traiter l'exemple suivant, successivement de façon rigoureuse puis de manière approchée, afin de déterminer la précision due à la matrice de transfert déterminée au début du chapitre.

Le treillis est supposé avoir un mouvement dans le plan de la page. S et I sont des constantes et $PR = RS = SQ = L$.

On a :

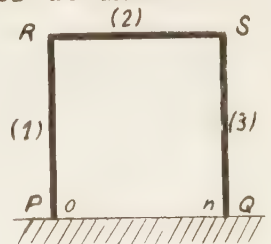


figure 4-11

$$\begin{vmatrix} T_0 \\ C_0 \\ \psi_0 \\ Y_0 \\ N_0 \\ U_0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} A & \dots & A & M_1 & A & \dots & A & M_1 & A & \dots & A \end{bmatrix} \begin{vmatrix} T_n \\ C_n \\ \psi_n \\ Y_n \\ N_n \\ U_n \\ 0 \end{vmatrix}$$

M_1 matrice transfert de coin.

$A \dots A$ matrice de transfert des côtés.

Soit B la matrice reliant $T_0, C_0, \psi_0, Y_0, N_0, U_0$ et $T_n, C_n, \psi_n, Y_n, N_n, U_n$; le cadre étant encastré en P et Q , il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= b_{31} T_n + b_{32} C_n + b_{35} N_n \\ 0 &= b_{41} T_n + b_{42} C_n + b_{45} N_n \\ 0 &= b_{61} T_n + b_{62} C_n + b_{65} N_n \end{aligned}$$

Les pulsations naturelles seront alors déduites de l'annulation du déterminant Δ ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{31} & b_{32} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{45} \\ b_{61} & b_{62} & b_{65} \end{vmatrix}$$

De façon rigoureuse, les expressions de $y(x)$ et $u(x)$ relatives aux côtés (1), (2), (3) sont de la forme :

$$y = A \sin \sqrt{\beta} x + B \cos \sqrt{\beta} x + C \operatorname{sh} \sqrt{\beta} x + D \operatorname{ch} \sqrt{\beta} x$$

pour le mouvement de flexion,

$$U = E \sin \gamma x + F \cos \gamma x$$

$$\text{où on a posé : } \beta^2 = \frac{\rho S \omega^2}{EI} ; \gamma = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

T, C, ψ, N sont alors aisément déterminées à partir de

$$\psi = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{C}{EI} = \frac{d\psi}{dx}, \quad T = \frac{dC}{dx}, \quad \frac{N}{ES} = \frac{dU}{dx}$$

Affectons aux coefficients A, B, C, D, E, F les indices 1, 2, 3, suivant les côtés et écrivons les conditions de compatibilité relatives aux coins (ici $\theta = \pi/2$).

En P

$$\begin{array}{ll}
U_1 = 0 & F_1 = 0 \\
Y_1 = 0 & B_1 + D_1 = 0 \\
\psi_1 = 0 & A_1 + C_1 = 0
\end{array}$$

En R

$$\begin{array}{ll}
T_2 = -N_1 & ES_Y [E_1 \cos \gamma L - F_1 \sin \gamma L] = -EI\beta\sqrt{\beta} [-A_2 + C_2] \\
N_2 = T_1 & EI\beta\sqrt{\beta} [-A_1 \cos \sqrt{\beta} L + B_1 \sin \sqrt{\beta} L + C_1 \operatorname{ch} \sqrt{\beta} L + D_1 \operatorname{sh} \sqrt{\beta} L] = ES_Y E_2 \\
C_2 = C_1 & -A_1 \sin \sqrt{\beta} L - B_1 \cos \sqrt{\beta} L + C_1 \operatorname{sh} \sqrt{\beta} L + D_1 \operatorname{ch} \sqrt{\beta} L = -B_2 + D_2 \\
\psi_2 = \psi_1 & A_1 \cos \sqrt{\beta} L - B_1 \sin \sqrt{\beta} L + C_1 \operatorname{ch} \sqrt{\beta} L + D_1 \operatorname{sh} \sqrt{\beta} L = A_2 + C_2 \\
Y_2 = U_1 & E_1 \sin \gamma L + F_1 \cos \gamma L = B_2 + D_2 \\
U_2 = -Y_1 & A_1 \sin \sqrt{\beta} L + B_1 \cos \sqrt{\beta} L + C_1 \operatorname{sh} \sqrt{\beta} L + D_1 \operatorname{ch} \sqrt{\beta} L = -F_2
\end{array}$$

en S

Les relations sont les mêmes que les relations précédentes en remplaçant les indices 1 et 2 par 2 et 3.

en Q

$$\begin{array}{ll}
U_3 = 0, & E_3 \sin \gamma L + F_3 \cos \gamma L = 0 \\
Y_3 = 0, & A_3 \sin \sqrt{\beta} L + B_3 \cos \sqrt{\beta} L + C_3 \operatorname{sh} \sqrt{\beta} L + D_3 \operatorname{ch} \sqrt{\beta} L = 0 \\
\psi_3 = 0, & A_3 \cos \sqrt{\beta} L - B_3 \sin \sqrt{\beta} L + C_3 \operatorname{ch} \sqrt{\beta} L + D_3 \operatorname{sh} \sqrt{\beta} L = 0
\end{array}$$

Les pulsations naturelles seront alors déduites de l'annulation des déterminants relatifs au 18 coefficients ($A_1, B_1 \dots$) qu'il aurait été lourd de reproduire.

Résultats

$$\begin{array}{lll}
L, \text{ longueur d'un côté} & 0,3 & \rho = 7,8.10^3 \\
e, \text{ épaisseur} & 0,005 & E = 2.10^{11} \\
l, \text{ largeur} & 0,01 &
\end{array}$$

	Det	N=5	N=10	N=20
ω_{sec}^{-1}	260,22	261,14	260,45	260,28
ω_{sec}^{-1}	1026,6	1064,0	1035,8	1028,9

Avec N, nombre de matrices représentant un côté.

b) Le dispositif représenté par la figure ci-contre permet d'utiliser la matrice M_2 . Le treillis a un mouvement dans le plan de la page.

La largeur = $1,15 \cdot 10^{-2}$
 $\rho = 7,84 \cdot 10^3$
 $E = 1,97 \cdot 10^3$

$L_1 = 0,2722$ $e_1 = 5,12 \cdot 10^{-3}$
 $L_2 = 0,2025$ $e_2 = 5,3 \cdot 10^{-3}$
 $L_3 = 0,2049$ $e_3 = 4,93 \cdot 10^{-3}$
 $L_4 = 0,2974$ $e_4 = 5,25 \cdot 10^{-3}$

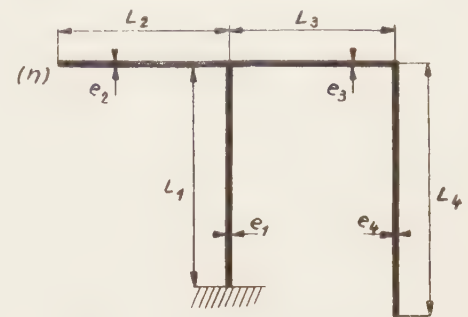


figure 4-12

On a

$$\begin{bmatrix} T_o \\ C_o \\ \psi_o \\ Y_o \\ N_o \\ U_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_n \\ C_n \\ \psi_n \\ Y_n \\ N_n \\ U_n \end{bmatrix}$$

Les pulsations naturelles seront immédiatement déduites des conditions aux limites T_o , T_n , C_o , C_n , N_o , N_n nuls.

Les 5 premières pulsations naturelles ont été mesurées et calculées.

	N=5	N=10	N=20	ω_{exp}	I = 100 $\frac{\omega_{exp} - \omega_{20}}{\omega_{exp}}$
ω_{sec}^{-1}	76,74	76,56	76,51	78,2	2,2
ω_{sec}^{-1}	129,9	129,8	129,8	132,5	2,0
ω_{sec}^{-1}	370	367,9	367,4	378,5	2,9
ω_{sec}^{-1}	529,1	526,8	526,3	545,5	3,5
ω_{sec}^{-1}	1626	1551	1534	1568	2,1

c) L'étude du cadre précédent permet d'utiliser la matrice M_3 . Le treillis a un mouvement dans le plan de la page.

$$\rho = 7,84 \cdot 10^3$$

$$E = 1,97 \cdot 10^{11}$$

$$\text{la largeur} = 1,052 \cdot 10^{-2}$$

$$\text{l'épaisseur} = 4,73 \cdot 10^{-3}$$

$$L_a = 0,1776$$

$$L_c = 0,1516$$

$$L_b = 0,3051$$

Posons : $|R| = |T C \psi Y N U|^T$ et soient les matrices carrées d'ordre 6: N, P, Q, S , telles qu'en utilisant les résultats précédemment obtenus on ait :

$$\begin{vmatrix} R_3 \\ R_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} N \\ Q \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P \\ S \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_2 \\ R_1 \end{vmatrix}$$

de plus on a :

$$\begin{vmatrix} R_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_a \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} R_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} R_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_b \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} R_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_4 \end{vmatrix}$$

ceci entraîne :

$$\begin{vmatrix} R_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} \left[\begin{vmatrix} N \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_1 \end{vmatrix} \right]$$

$$= \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} N \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} R_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} \left[\begin{vmatrix} Q \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_1 \end{vmatrix} \right]$$

$$= \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_b \end{vmatrix}$$

Posons

$$\begin{vmatrix} W \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} N \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A \end{vmatrix}$$

Les conditions aux limites sont $T C N$ nuls en 5, 6, b et ψ, Y, U , nuls en a, ceci entraîne que les pulsations naturelles seront déduites de :

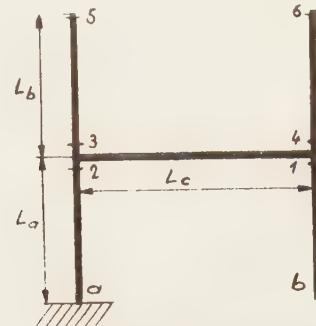


figure 4-13

$$\begin{vmatrix}
 w_{11} & w_{12} & w_{15} & x_{13} & x_{14} & x_{16} \\
 w_{21} & w_{22} & w_{25} & x_{23} & x_{24} & x_{26} \\
 w_{51} & w_{52} & w_{55} & x_{53} & x_{54} & x_{56} \\
 y_{11} & y_{12} & y_{15} & z_{13} & z_{14} & z_{16} \\
 y_{21} & y_{22} & y_{25} & z_{23} & z_{24} & z_{26} \\
 y_{51} & y_{52} & y_{55} & z_{53} & z_{54} & z_{56}
 \end{vmatrix} = 0$$

Les résultats obtenus seront les suivants :

	N=5	N=10	N=20	ω_{exp}	$I=100 \frac{\omega_{\text{exp}} - \omega_{20}}{\omega_{\text{exp}}}$
ω_{sec}^{-1}	59,80	59,74	59,72	61,49	2,7
ω_{sec}^{-1}	208,9	208,6	208,5	209,8	0,66
ω_{sec}^{-1}	412,0	409,8	409,3	422	3,1
ω_{sec}^{-1}	810,6	806,0	804,9	831	2,5
ω_{sec}^{-1}	1165	1153	1150	1192	3,3

IV - APPLICATION DE LA METHODE DES MATRICES DE FORCES ET DE DEPLACEMENTS

Nous allons étudier les deux exemples où l'on a utilisé les matrices de transfert M_2 et M_3 .

1) Exemple n° 1

Les éléments sont supposés inextensibles. Compte tenu des conditions aux limites (extrémités A et D libres et extrémité E encastree) nous poserons :

$$Y_1 = \left(\frac{x}{L_1}\right)^2 p_1 + \left(\frac{x}{L_1}\right)^3 p_2$$

$$Y_2 = \left(\frac{x}{L_2}\right) p_3 + \left[6 \left(\frac{x}{L_2}\right)^2 - 4 \left(\frac{x}{L_2}\right)^3 + \left(\frac{x}{L_2}\right)^4\right] p_4$$

$$U_2 = p_5$$

$$Y_3 = \left(\frac{x}{L_3}\right) p_6 + \left(\frac{x}{L_3}\right)^2 p_7 + \left(\frac{x}{L_3}\right)^3 p_8$$

$$U_3 = p_9$$

$$Y_4 = p_{10} + \left(\frac{x}{L_4}\right) p_{11} + \left[6 \left(\frac{x}{L_4}\right)^2 - 4 \left(\frac{x}{L_4}\right)^3 + \left(\frac{x}{L_4}\right)^4\right] p_{12}$$

$$U_4 = p_{13}$$

Recherchons alors les relations existant entre les coordonnées liées $p_1, p_2 \dots p_{13}$. L'égalité des déplacements et des angles de rotations en B et C entraîne alors :

$$Y_3(x=L_3) = -U_4(x=0)$$

$$Y'_3(x=L_3) = Y'_4(x=0)$$

$$U_3(x=L_3) = Y_4(x=0)$$

$$Y_1(x=L_1) = U_2(x=0) = -U_3(x=0)$$

$$Y'_1(x=L) = Y'_2(x=0) = Y'_3(x=0)$$

$$p_{13} = -(p_6 + p_7 + p_8)$$

$$\frac{p_{11}}{L_4} = \frac{p_6 + 2p_7 + 3p_8}{L_3}$$

$$p_9 = p_{10}$$

$$p_1 + p_2 = p_5 = -p_9$$

$$\frac{p_3}{L_2} = \frac{p_6}{L_3} = \frac{2p_1 + 3p_2}{L_1}$$

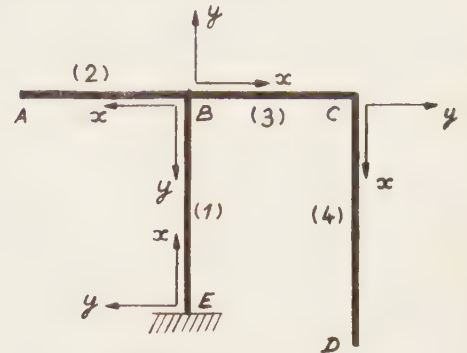


figure 4-14

Les 7 relations entre les p permettront de déterminer la matrice $[\beta]$ reliant les 13 coordonnées liées aux 6 coordonnées généralisées. On prendra comme coordonnées généralisées $p_1, p_2, p_4, p_7, p_8, p_{12}$, ce qui entraînera :

$$\begin{array}{c|cccccc|}
 p_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 p_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 p_3 & \frac{2L_2}{L_1} & \frac{3L_2}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 p_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 p_5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 p_6 & \frac{2L_3}{L_1} & \frac{3L_3}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 p_7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 p_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 p_9 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 p_{10} & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 p_{11} & \frac{2L_4}{L_1} & \frac{3L_4}{L_1} & 0 & \frac{2L_4}{L_3} & \frac{3L_4}{L_3} & 0 \\
 p_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 p_{13} & \frac{-2L_3}{L_1} & \frac{-3L_3}{L_1} & 0 & -1 & -1 & 0
 \end{array} = \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_4 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_{12} \end{array}$$

La détermination de la matrice $[k]$ n'offre pas de difficultés et à partir de $[k]$ et $[\beta]$ on a la matrice de raideur $[K]$ par :

$$[K] = [\beta]^T [k] [\beta] \quad \text{avec} \quad k_{ij} = \int_0^l EI \phi''_i \phi''_j dx$$

ϕ_i , fonction de déplacement correspondant à p_i .

$$\boxed{K} = E \begin{vmatrix} \frac{4I_1}{L_1^3} & \frac{6I_1}{L_1^3} & & \\ \frac{6I_1}{L_1^3} & \frac{12I_1}{L_1^3} & & \\ & & \frac{144I_2}{5L_2^3} & \\ & & & \begin{vmatrix} \frac{4I_3}{L_3^3} & \frac{6I_3}{L_3^3} \\ \frac{6I_3}{L_3^3} & \frac{12I_3}{L_3^3} \end{vmatrix} \\ & & & & \frac{144I_4}{5L_4^3} \end{vmatrix}$$

Les termes non indiqués sont nuls

On obtient ensuite la matrice de masse généralisée par la relation :

$$\boxed{M} = [\beta]^T [m_{ij}] [\beta] \text{ avec } m_{ij} = \int_0^l \rho S \phi_i \phi_j dx$$

dont les termes sont :

$$\begin{aligned}
 m_{11} = & \frac{\rho S_1 L_1}{5} + \frac{4\rho}{3L_1^2} \left(S_2 L_2^3 + S_3 L_3^3 + S_4 L_4^3 \right) + \rho \left(S_2 L_2 + S_3 L_3 + S_4 L_4 \right) + \\
 & + 2\rho \frac{S_4}{L_1} \left(\frac{2L_4 L_3^2}{L_1} - L_4^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{22} = & \frac{\rho S_1 L_1}{7} + \frac{3\rho}{L_1^2} \left(S_2 L_2^3 + S_3 L_3^3 + S_4 L_4^3 \right) + \rho \left(S_2 L_2 + S_3 L_3 + S_4 L_4 \right) + \\
 & + \frac{\rho S_4}{L_1} \left(\frac{9L_4 L_3^2}{L_1} - 3L_4^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$m_{33} = \frac{104}{45} \rho S_2 L_2$$

$$m_{44} = \frac{\rho S_3 L_3}{5} + \rho S_4 L_4 \left(1 + \frac{4}{3} \frac{L_4^2}{L_3^2} \right)$$

$$m_{55} = \frac{\rho S_3 L_3}{7} + \rho S_4 L_4 \left(1 + \frac{2L_4^2}{L_3^2} \right)$$

$$m_{66} = \frac{104}{45} \rho S_4 L_4$$

$$m_{12} = m_{21} = \frac{\rho S_1 L_1}{6} + \frac{2\rho}{L_1^2} \left(S_2 L_2^3 + S_3 L_3^3 + S_4 L_4^3 \right) + \\ + \rho \left(S_2 L_2 + S_3 L_3 + S_4 L_4 \right) + \frac{\rho S_4}{L_1} \left(\frac{6L_4 L_3^2}{L_1} - \frac{5}{2} L_4^2 \right)$$

$$m_{13} = m_{31} = \frac{26}{15} \frac{\rho S_2 L_2^2}{L_1}$$

$$m_{14} = m_{41} = \frac{\rho S_3 L_3^2}{2L_1} + \rho S_4 L_4 \left(\frac{2L_3}{L_1} + \frac{4L_4^2}{3L_1 L_3} - \frac{L_4}{L_3} \right)$$

$$m_{15} = m_{51} = \frac{2\rho S_3 L_3^2}{5L_1} + \rho S_4 L_4 \left(\frac{2L_3}{L_1} + \frac{2L_4^2}{L_1 L_3} - \frac{3}{2} \frac{L_4}{L_3} \right)$$

$$m_{16} = m_{61} = -\frac{6}{5} \rho S_4 L_4 + \frac{26}{15} \frac{\rho S_4 L_4^2}{L_1}$$

$$m_{23} = m_{32} = \frac{13}{5} \frac{\rho S_2 L_2^2}{L_1}$$

$$m_{24} = m_{42} = \frac{3}{4} \frac{\rho S_3 L_3^2}{L_1} + \rho S_4 L_4 \left(3 \frac{L_3}{L_1} + \frac{2L_4^2}{L_1 L_3} - \frac{L_4}{L_3} \right)$$

$$m_{25} = m_{52} = \frac{3}{5} \frac{\rho S_3 L_3^2}{L_1} + \rho S_4 L_4 \left(3 \frac{L_3}{L_1} + \frac{3L_4^2}{L_1 L_3} - \frac{3}{2} \frac{L_4}{L_3} \right)$$

$$m_{26} = m_{62} = \rho S_4 L_4 \left(-\frac{6}{5} + \frac{13}{5} \frac{L_4}{L_1} \right)$$

$$m_{34} = m_{43} = 0$$

$$m_{35} = m_{53} = 0$$

$$m_{36} = m_{63} = 0$$

$$m_{45} = m_{54} = \frac{\rho S_3 L_3}{6} + \rho S_4 L_4 \left(1 + \frac{2L_4^2}{L_3^2} \right)$$

$$m_{46} = m_{64} = \frac{26}{15} \frac{\rho S_4 L_4^2}{L_3}$$

$$m_{56} = m_{65} = \frac{13}{5} \frac{\rho S_4 L_4^2}{L_3}$$

Les pulsations naturelles seront alors obtenues à partir des valeurs propres de $[K]^{-1} [M]$

2) Application n° 2

Nous poserons ici :

$$Y_1 = \left(\frac{x}{L_a}\right)^2 p_1 + \left(\frac{x}{L_a}\right)^3 p_2$$

$$Y_2 = p_3 + \left(\frac{x}{L_c}\right) p_4 + \left[6 \left(\frac{x}{L_c}\right)^2 - 4 \left(\frac{x}{L_c}\right)^3 + \left(\frac{x}{L_c}\right)^4\right] p_5$$

$$Y_3 = p_6 + \left(\frac{x}{L_a}\right) p_7 + \left[6 \left(\frac{x}{L_a}\right)^2 - 4 \left(\frac{x}{L_a}\right)^3 + \left(\frac{x}{L_c}\right)^4\right] p_8$$

$$U_3 = p_9$$

$$Y_4 = p_{10} + \left(\frac{x}{L_c}\right) p_{11} + \left[6 \left(\frac{x}{L_c}\right)^2 - 4 \left(\frac{x}{L_c}\right)^3 + \left(\frac{x}{L_c}\right)^4\right] p_{12}$$

$$U_4 = p_{13}$$

$$Y_5 = \left(\frac{x}{L_b}\right) p_{14} + \left(\frac{x}{L_b}\right)^2 p_{15} + \left(\frac{x}{L_b}\right)^3 p_{16}$$

$$U_5 = p_{17}$$

Recherchons alors les relations existant entre les coordonnées liées $p_1, p_2, \dots, p_{17}$.

$$Y_1(x=L_a) = Y_2(x=0) = -U_5(x=0) \quad p_1 + p_2 = p_3 = -p_{17}$$

$$Y'_1(x=L_a) = Y'_2(x=0) = Y'_5(x=0) \quad \frac{2p_1 + 3p_2}{L_a} = \frac{p_4}{L_c} = \frac{p_{14}}{L_b}$$

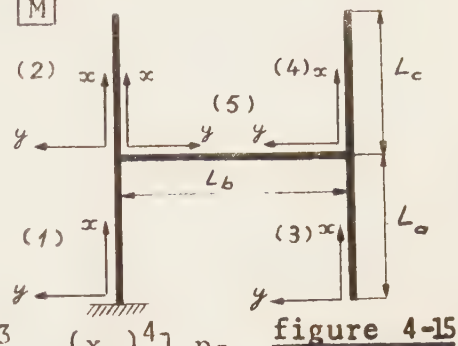
$$Y_5(x=L_b) = U_4(x=0) = +U_3(x=L_a) \quad p_{14} + p_{15} + p_{16} = p_9 = p_{13}$$

$$Y_3(x=L_a) = Y_4(x=0) = -U_5(x=L_b) \quad p_6 + p_7 + 3p_8 = p_{10} = -p_{17}$$

$$Y'_3(x=L_a) = Y'_4(x=0) = Y'_5(x=L_b) \quad \frac{p_7 + 4p_8}{L_a} = \frac{p_{11}}{L_c} = \frac{p_{14} + 2p_{15} + 3p_{16}}{L_b}$$

Les 10 relations entre $p_1, p_2, \dots, p_{17}$ déterminent alors la matrice $[\beta]$ reliant les 17 coordonnées liées aux 7 coordonnées généralisées.

Les coordonnées généralisées seront $p_1, p_2, p_5, p_7, p_8, p_9, p_{12}$ et on obtient :



p1	1	0	0	0	0	0	0	
p2	0	1	0	0	0	0	0	
p3	1	1	0	0	0	0	0	
p4	$\frac{2L_c}{L_a}$	$\frac{3L_c}{L_a}$	0	0	0	0	0	
p5	0	0	1	0	0	0	0	
p6	1	1	0	-1	3	0	0	
p7	0	0	0	1	0	0	0	p1
p8	0	0	0	0	1	0	0	p2
p9	0	0	0	0	0	1	0	p5
p10	1	1	0	0	0	0	0	p7
p11	0	0	0	$\frac{L_c}{L_a}$	$\frac{4L_c}{L_a}$	0	0	p8
p12	0	0	0	0	0	0	1	p9
p13	0	0	0	0	0	1	0	p12
p14	$\frac{2L_b}{L_a}$	$\frac{3L_b}{L_a}$	0	0	0	0	0	
p15	$\frac{-4L_b}{L_a}$	$\frac{-6L_b}{L_a}$	0	$\frac{-L_b}{L_a}$	$\frac{-4L_b}{L_a}$	3	0	
p16	$\frac{2L_b}{L_a}$	$\frac{3L_b}{L_a}$	0	$\frac{L_b}{L_a}$	$\frac{4L_b}{L_a}$	-2	0	
p17	-1	-1	0	0	0	0	0	

$[K]$ s'obtient à partir de $[K] = [\beta]^T [k] [\beta]$

$$[K] = EI$$

$\frac{4}{L_a^3}$	$\frac{6}{L_a^3}$	0	$\frac{4}{L_b L_a^2}$	$\frac{16}{L_b L_a^2}$	$\frac{-12}{L_a L_b^2}$	0
$+\frac{16}{L_b L_a^2}$	$+\frac{24}{L_b L_a^2}$					
$\frac{6}{L_a^3}$	$\frac{12}{L_a^3}$	0	$\frac{6}{L_b L_a^2}$	$\frac{24}{L_b L_a^2}$	$\frac{-18}{L_a L_b^2}$	0
$+\frac{24}{L_b L_a^2}$	$+\frac{36}{L_b L_a^2}$					
0	0	$\frac{144}{5L_c^3}$	0	0	0	0
$\frac{4}{L_b L_a^2}$	$\frac{6}{L_b L_a^2}$	0	$\frac{4}{L_b L_a^2}$	$\frac{16}{L_b L_a^2}$	$\frac{-6}{L_a L_b^2}$	0
$\frac{16}{L_b L_a^2}$	$\frac{24}{L_b L_a^2}$	0	$\frac{16}{L_b L_a^2}$	$\frac{144}{5L_a^3}$	$\frac{-24}{L_a L_b^2}$	0
$\frac{-12}{L_a L_b^2}$	$\frac{-18}{L_a L_b^2}$	0	$\frac{-6}{L_a L_b^2}$	$\frac{-24}{L_a L_a^2}$	$\frac{12}{L_b^3}$	0
0	0	0	0	0	0	$\frac{144}{5L_c^3}$

On obtient ensuite la matrice de masse généralisée M dont les termes sont (ρS étant sous entendu) :

$$m_{11} = \frac{6}{5} L_a + L_b + 2L_c + 2 \frac{L_c^2}{L_a} + \frac{4}{3} \frac{L_c^3}{L_a^2} + \frac{4}{105} \frac{L_b^3}{L_a^2}$$

$$m_{22} = \frac{8}{7} L_a + L_b + 2L_c + \frac{3L_c^2}{L_a} + \frac{3L_c^3}{L_a^2} + \frac{3}{35} \frac{L_b^3}{L_a^2}$$

$$m_{33} = \frac{104}{45} L_c$$

$$m_{44} = \frac{L_a^3}{3} + \frac{L_c^3}{3L_a^2} + \frac{L_b^3}{105 L_a^2}$$

$$m_{55} = \frac{833}{45} L_a + \frac{16}{3} \frac{L_c^3}{L_a^2} + \frac{16}{105} \frac{L_b^3}{L_a^2}$$

$$m_{66} = L_a + L_c + \frac{13}{35} L_b$$

$$m_{77} = \frac{104}{45} L_c$$

$$m_{12} = m_{21} = \frac{7}{6} L_a + L_b + 2L_c + \frac{5}{2} \frac{L_c^2}{L_a} + \frac{2L_c^3}{L_a^2} + \frac{2}{35} \frac{L_b^3}{L_a^2}$$

$$m_{13} = m_{31} = \frac{6}{5} L_c + \frac{26}{15} \frac{L_c^2}{L_a}$$

$$m_{14} = m_{41} = \frac{-L_a}{2} + \frac{L_c^2}{2L_a} - \frac{1}{70} \frac{L_b^3}{L_a^2}$$

$$m_{15} = m_{51} = \frac{21}{5} L_a + \frac{2L_c^2}{L_a} - \frac{6}{105} \frac{L_b^3}{L_a^2}$$

$$m_{16} = m_{61} = \frac{13}{210} \frac{L_b^2}{L_a}$$

$$m_{17} = m_{71} = \frac{6}{5} L_c$$

$$m_{23} = m_{32} = \frac{6}{5} L_c + 3 \frac{L_c^2}{L_a}$$

$$m_{24} = m_{42} = \frac{-L_a}{2} + \frac{L_c^2}{2L_a} - \frac{3}{140} \frac{L_b^3}{L_a^2}$$

$$m_{25} = m_{52} = \frac{21}{5} L_a + \frac{2L_c^2}{L_a} - \frac{3}{35} \frac{L_b^3}{L_a^2}$$

$$m_{26} = m_{62} = \frac{13}{140} \frac{L_b^2}{L_a}$$

$$m_{27} = m_{72} = \frac{6}{5} L_c$$

$$m_{34} = m_{43} = 0$$

$$m_{35} = m_{53} = 0$$

$$m_{36} = m_{63} = 0$$

$$m_{37} = m_{73} = 0$$

$$m_{45} = m_{54} = \frac{-11}{6} L_a + \frac{4}{3} \frac{L_c^3}{L_a^2} + \frac{12}{315} \frac{L_b^3}{L_a^2}$$

$$m_{46} = m_{64} = \frac{-11}{210} \frac{L_b^2}{L_a}$$

$$m_{47} = m_{74} = \frac{13}{15} \frac{L_c^2}{L_a}$$

$$m_{56} = m_{65} = \frac{-22}{105} \frac{L_b^2}{L_a}$$

$$m_{57} = m_{75} = \frac{52}{15} \frac{L_c^2}{L_a}$$

$$m_{67} = m_{76} = 0$$

3) Résultats numériques

Nous avons appliqué la méthode de déflation pour calculer les valeurs propres des matrices $|K|^{-1} |M|$.

Les résultats obtenus ont été satisfaisants pour les deux premières pulsations dans l'exemple n° 1 et pour la première dans l'exemple n° 2.

Exemple n° 1

$$\begin{aligned} \omega_1(\text{sec}^{-1}) &= 76,62 \\ \omega_2(\text{sec}^{-1}) &= 129,7 \end{aligned}$$

Exemple n° 2

$$\omega_1(\text{sec}^{-1}) = 59,8$$

V - COMPARAISON ENTRE LA METHODE DES MATRICES DE TRANSFERT ET CELLE DES MATRICES DE FORCES ET DE DEPLACEMENTS

La précision des résultats obtenus à partir de la méthode des matrices de forces et de déplacements peut être améliorée par une mise en oeuvre très élaborée (18-19). Il faut cependant remarquer que l'application de la méthode devient alors difficile.

Il est possible d'établir un parallèle entre la méthode des matrices de transfert et celle des matrices de forces et de déplacements.

1) L'application de la méthode des matrices de forces et de déplacements peut se décomposer ainsi :

a. recherche des coordonnées caractérisant un élément et détermination de $[\beta]$ reliant les coordonnées liées et les coordonnées généralisées.

b. calcul des matrices de raideur $[k]$ et de masse $[m_{ij}]$ caractéristiques des éléments.

c. calcul de $[K]$ et $[M]$ à partir de $[k]$, $[m_{ij}]$, $[\beta]$.

d. obtention des pulsations naturelles à partir des valeurs propres de $[K]^{-1} [M]$.

2) L'application de la méthode des matrices de forces et de déplacements peut se caractériser ainsi :

a. recherche de T, C, ... caractérisant les extrémités d'un élément élémentaire donc de $[A_k]$ (cf 1, a).

b. détermination de $[B] = [A_1] \dots [A_n]$ caractérisant l'élément entier (cf 1, b, c).

c. détermination de la condition de compatibilité du système entraînant par l'annulation du déterminant qui en est déduit, la connaissance des pulsations naturelles (cf 1, d).

CHAPITRE 5

ASPECT EXPERIMENTAL ET PROCEDES DE CALCUL

Les diverses méthodes de calcul, qu'elles soient rigoureuses (ch I) ou approchées (ch II, III, IV), nécessitent la connaissance des paramètres mécaniques et géométriques relatifs aux systèmes étudiés (verges ou treillis). Il est alors possible de calculer numériquement les pulsations naturelles. Leur détermination expérimentale est facile, sauf dans le cas de la verge en rotation. A cet effet, nous avons été amenés à mettre au point un collecteur permettant d'utiliser des jauges de contraintes.

I-DETERMINATION DES PARAMETRES GEOMETRIQUES ET MECANIQUES

Les dimensions des verges étudiées ont été connues avec une très grande précision par la mise en oeuvre de méthodes interférométriques. La précision obtenue sur les longueurs étant de l'ordre du micron, on peut considérer que les calculs d'ordre géométriques étaient entachés d'une incertitude négligeable. Dans le cas des treillis, l'épaisseur a été obtenue avec une précision de l'ordre de 2/100ème de mm.

La détermination de la masse volumique ρ a été faite simplement à partir d'un parallélépipède de métal.

La détermination du module de Young dans chaque cas expérimental a nécessité d'associer à chaque système étudié une verge issue du même matériau, de section droite prismatique, ayant la forme d'un parallélépipède rectangle. Les dimensions retenues nous assuraient de l'absence d'effets secondaires et nous avons mesuré la période fondamentale en mouvement de flexion dont nous déduisons la valeur de E.

La même verge a été utilisée dans le cas de la flexion-torsion pour déterminer G . On a, en effet, alors utilisé la mesure de la pulsation naturelle du premier mode de torsion.

Il est à remarquer que G n'intervient en flexion que dans l'effet secondaire produit par le cisaillement de l'effort tranchant. Une légère incertitude sur G , en prenant $\sigma = 0,3$ dans la formule $G = E/2(1 + \sigma)$, ne provoquerait qu'une erreur sensible sur l'un des effets secondaires.

II-DETERMINATION DES PULSATIONS NATURELLES

Le dispositif d'excitation et de mesure est schématisé par la figure 5-1 ; le dispositif étudié est constitué par une verge encastrée-libre.

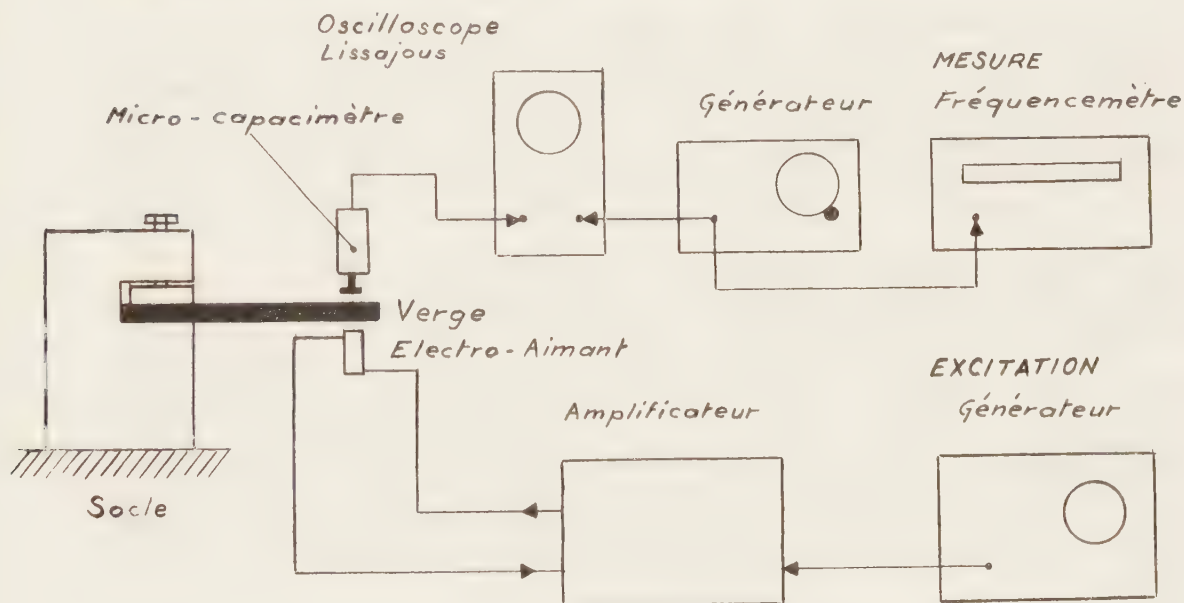


figure 5-1

Celle-ci est encastrée sur un socle, lui-même fixé à un massif de béton. L'excitation se fait par l'intermédiaire d'un électro-aimant alimenté par l'intermédiaire d'un amplificateur de puissance par un générateur basse fréquence.

Les mesures se font en utilisant un microcapacimètre à modulation de fréquence qui attaque un oscillographe. On observe alors les figures de Lissajous issues du signal représentant la vibration mesurée et d'un générateur basse fréquence dont la fréquence exacte est mesurée à l'aide d'un fréquencemètre digital.

III-DETERMINATION DES PULSATIONS NATURELLES DE FLEXION AVEC

FORCE CENTRIFUGE

Référons-nous à la figure (4-2). Nous avons tout d'abord un moteur à courant continu dont la vitesse est réglée par un montage de l'inducteur en série-shunt (1). Il vient ensuite un dispositif de mesure de la vitesse de rotation du moteur (2).

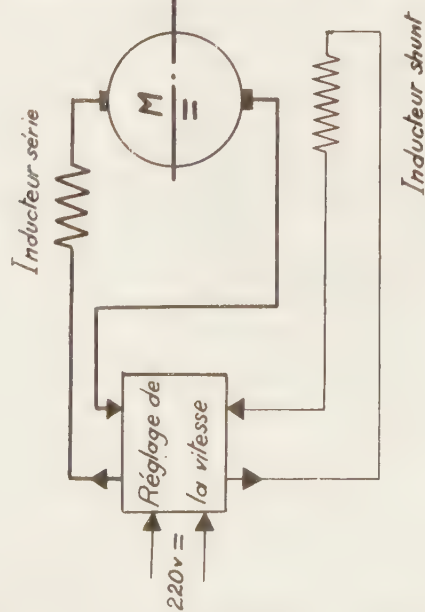
La verge est entraînée dans un mouvement de rotation par un dispositif approprié dont la figure (4-3) précise la nature. Le collecteur que nous avons construit a exigé une mise au point délicate. On en trouvera le schéma à la suite du texte (figure 4-4). Les jauges de contraintes sont collées sur la verge et leur signal est acheminé vers un enregistreur à pont dynamique de mesure, incorporé.

L'équipage tournant ayant été soigneusement équilibré, la cause excitatrice prépondérante est la partie alternative des couples moteurs ; s'il arrive que la fréquence de rotation du moteur, donc celle de son couple, soit un sous-multiple de la fréquence naturelle actuelle de la verge, alors l'enregistrement se fait sur une résonance ; il a une amplitude particulièrement grande. Dans tous les autres cas, l'excitation ne se faisant pas à la résonance, le signal observé résulte de la superposition de tous les modes, s'effectue à niveau très bas et est difficilement interprétable.

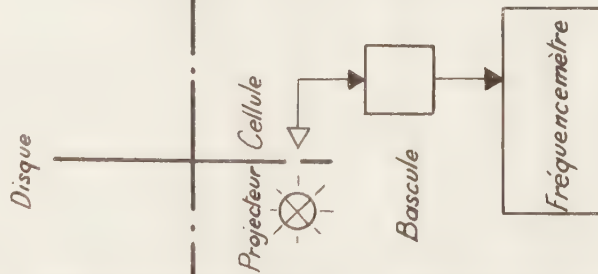
La vitesse de rotation du moteur est mesurée par un dispositif dans lequel un disque portant un trou intercepte un faisceau lumineux. Le signal en créneau ainsi obtenu excite un multivibrateur dont la fréquence de basculement est mesurée à l'aide d'un fréquencemètre. Nous avons ainsi pu constater la remarquable stabilité de la vitesse de rotation du moteur, de l'ordre de 1/500ème.

ENTRAINEMENT

VARIATION DE LA VITESSE



MESURE DE LA VITESSE



VERGE

REGLAGE ET CONTROLE

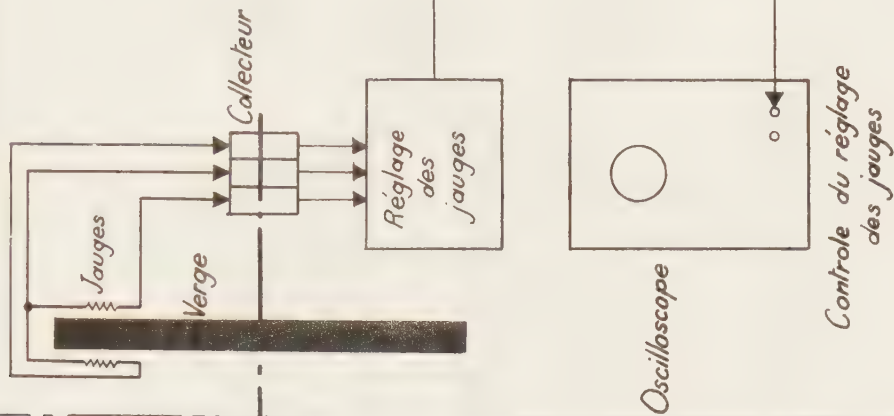


figure 5-2

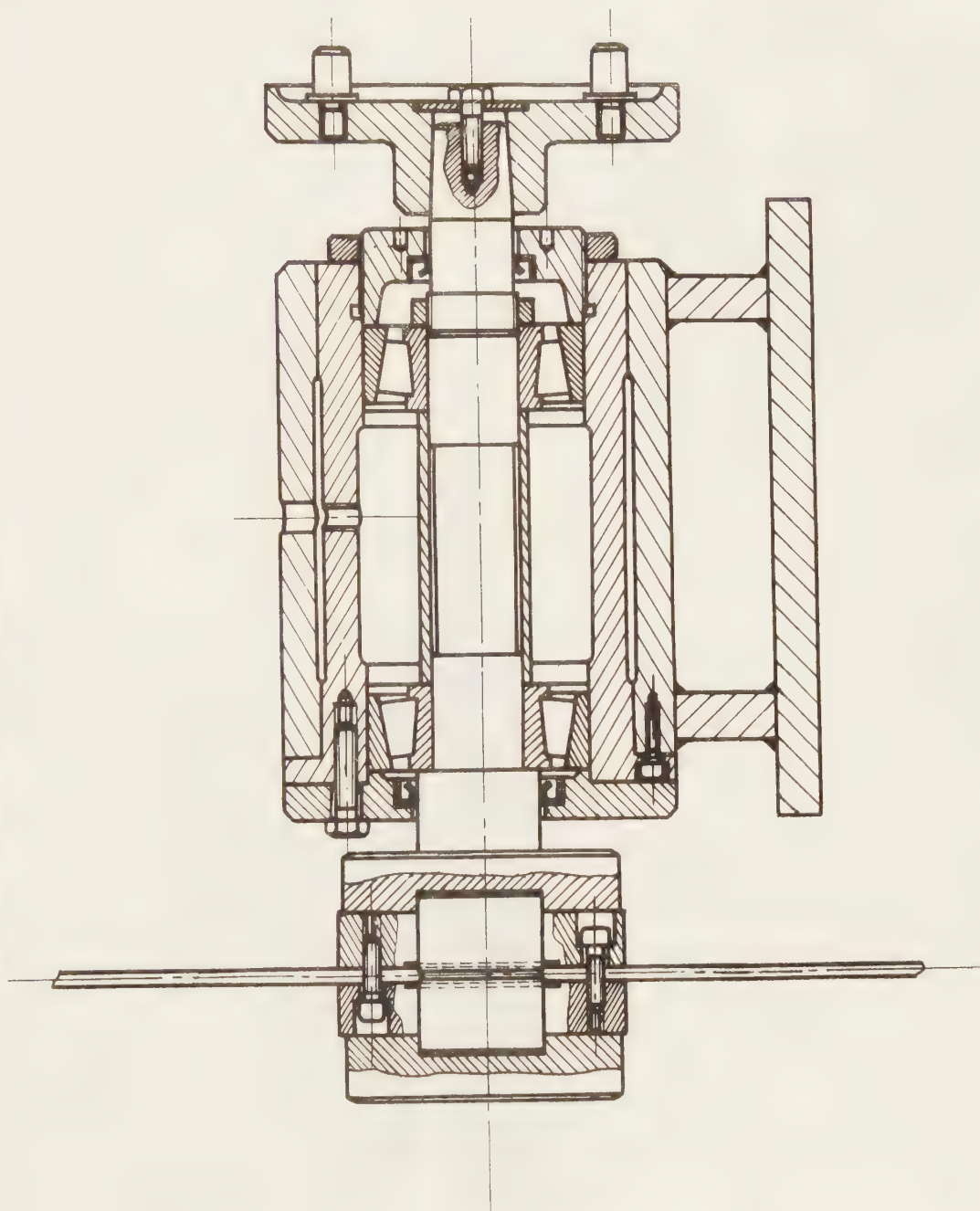


figure 5-3

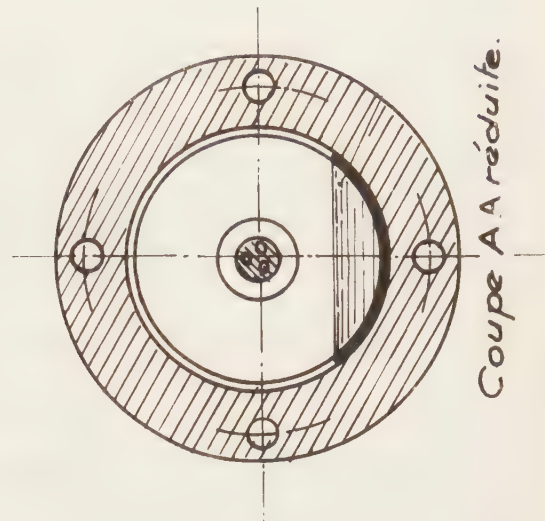
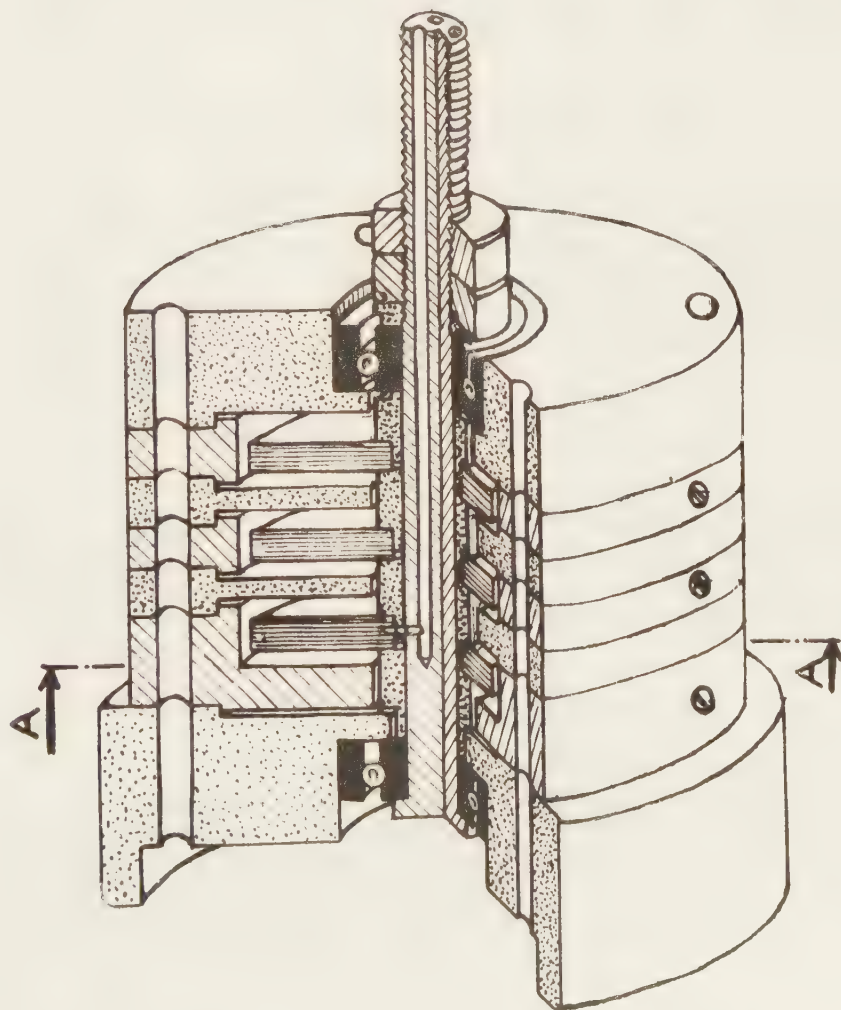


Figure 5-4

IV-PROCEDES DE CALCUL

Les calculs numériques des chapitres II, III, IV ont été effectués à l'aide d'un ordinateur IBM 1620 et les programmes écrits en Fortran Format. Les calculs relatifs au chapitre V ont été exécutés sur un ordinateur IBM 1130 et programmés en Fortran IV.

Nous avons présenté quelques organigrammes.

Organigramme n° 1 (Fig 5-5)

Ici on calcule les constantes de flexion avec effets secondaires déduites des relations 1-41,-,1-46. Le programme entièrement automatique permet de déterminer sans intervention manuelle $b_1,-,b_n$ relatifs à un type de condition aux limites données et ceci avec la précision que l'on désire.

Organigramme n° II (Fig 5-6)

Il correspond au calcul des pulsations naturelles de flexion avec ou sans effets secondaires, de flexion avec rotation de flexion-torsion. En début de programme on forme la matrice $[A]$ correspondant à un élément, on effectue le produit $[A_1] - [A_n]$ et on calcule la valeur du déterminant traduisant la compatibilité des conditions aux limites en fonction de ω .

Organigramme n° III (Fig 5-7)

On calcule les pulsations naturelles de l'ensemble de la page 85. Dans un premier temps on forme les matrices $[M_1]$ et $[M_2]$. On effectue ensuite le produit de matrices reliant les extrémités libres et on calcule la valeur du déterminant traduisant la compatibilité des conditions aux limites en fonction de ω .

Organigramme n° IV (Fig 5-8)

On calcule les pulsations naturelles de l'exemple de la page 86. Initialement on forme quatre sous-programmes qui permettent d'obtenir $[A]$, $[A]^n$, $[M_3]$ et la valeur du déterminant traduisant les conditions aux limites. Le programme principal relie les extrémités 5,6 aux extrémités a,b en faisant appel successivement aux quatre sous-programmes.

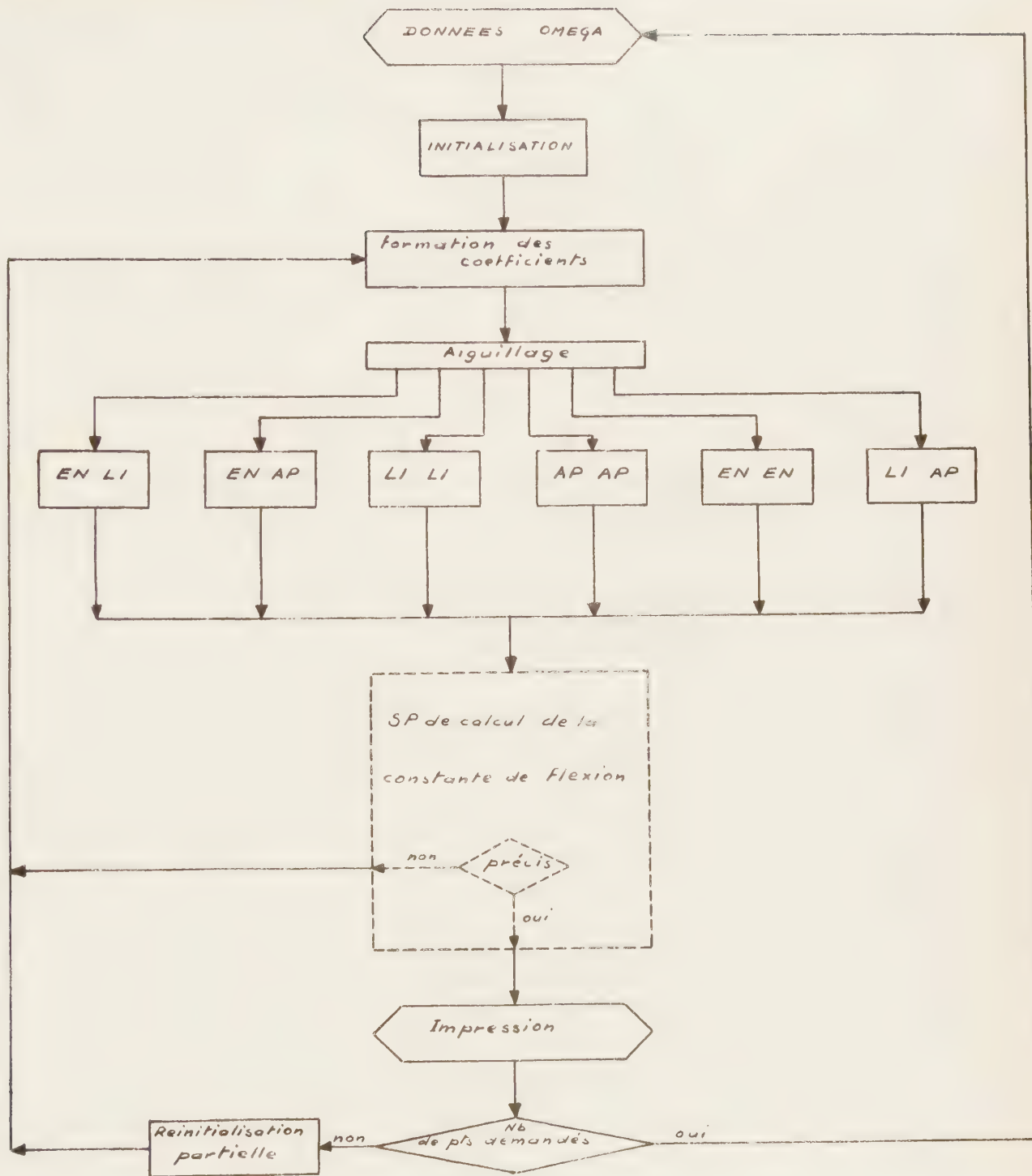


figure 5-5

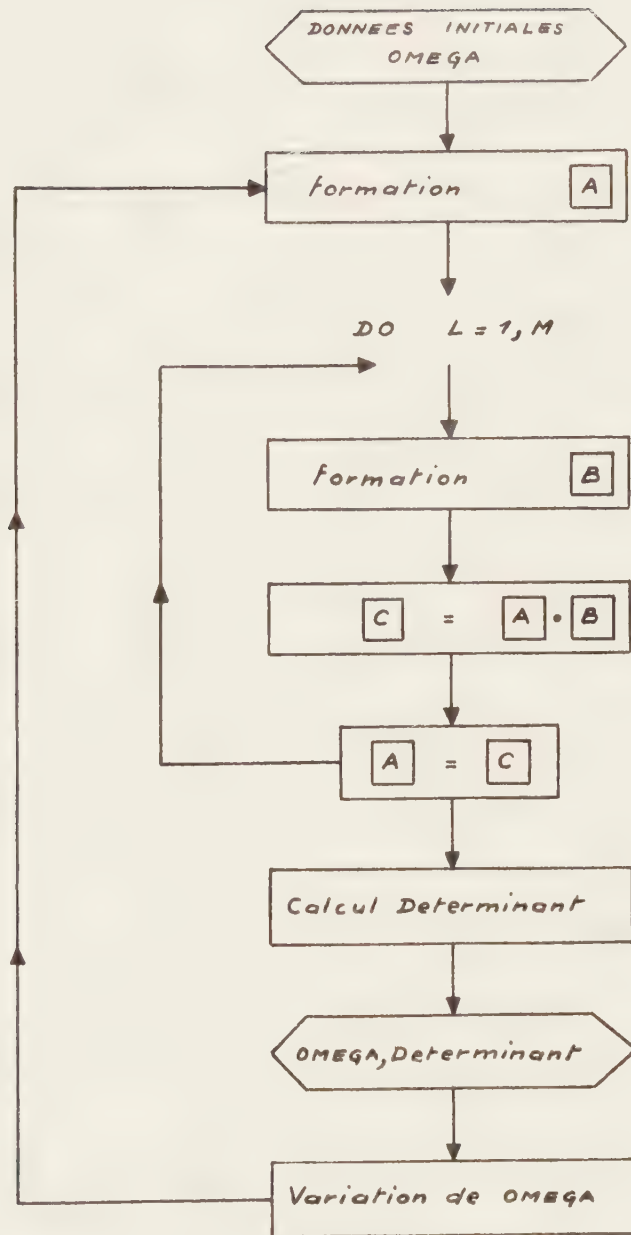


figure 5-6

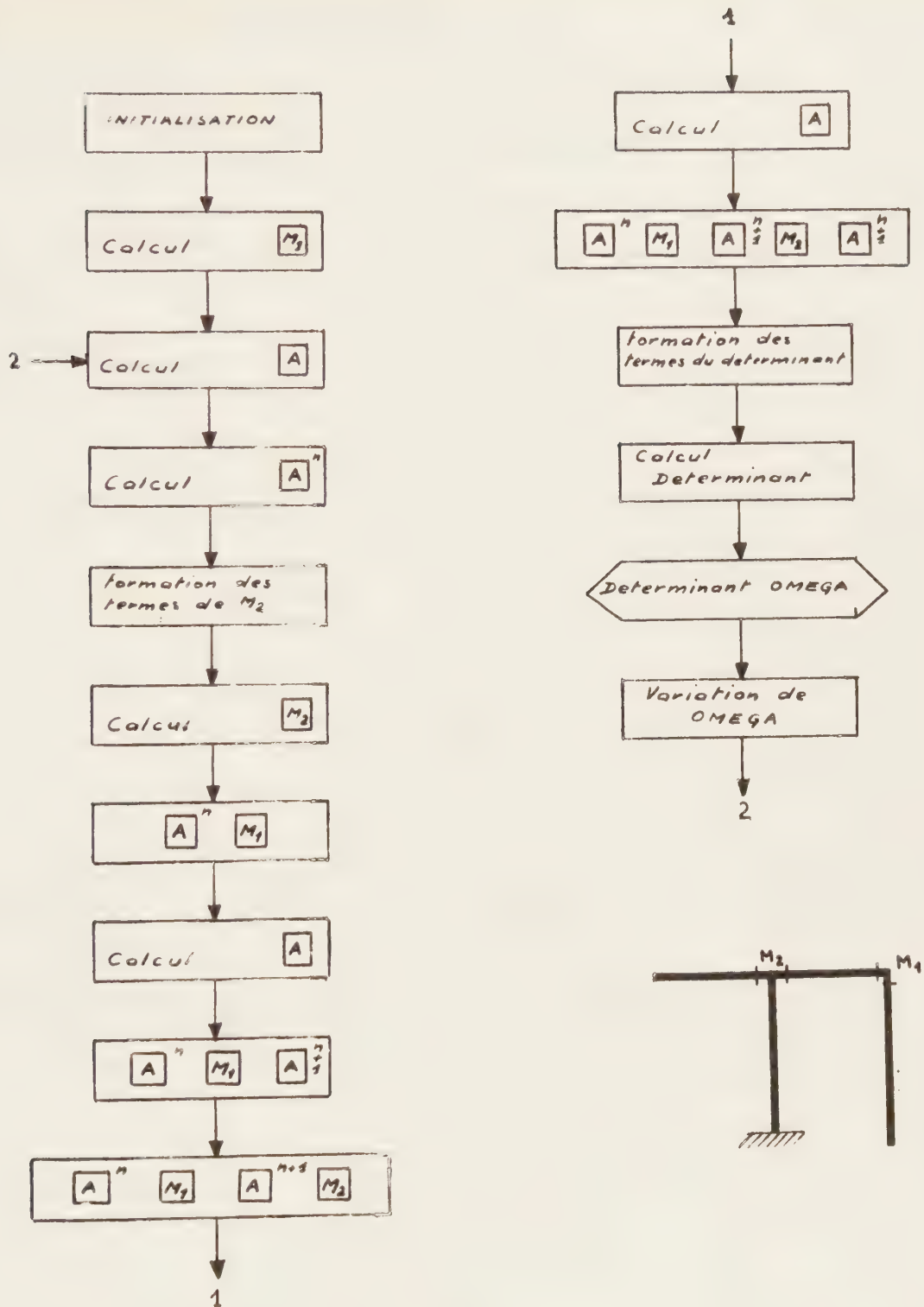


figure 5-7

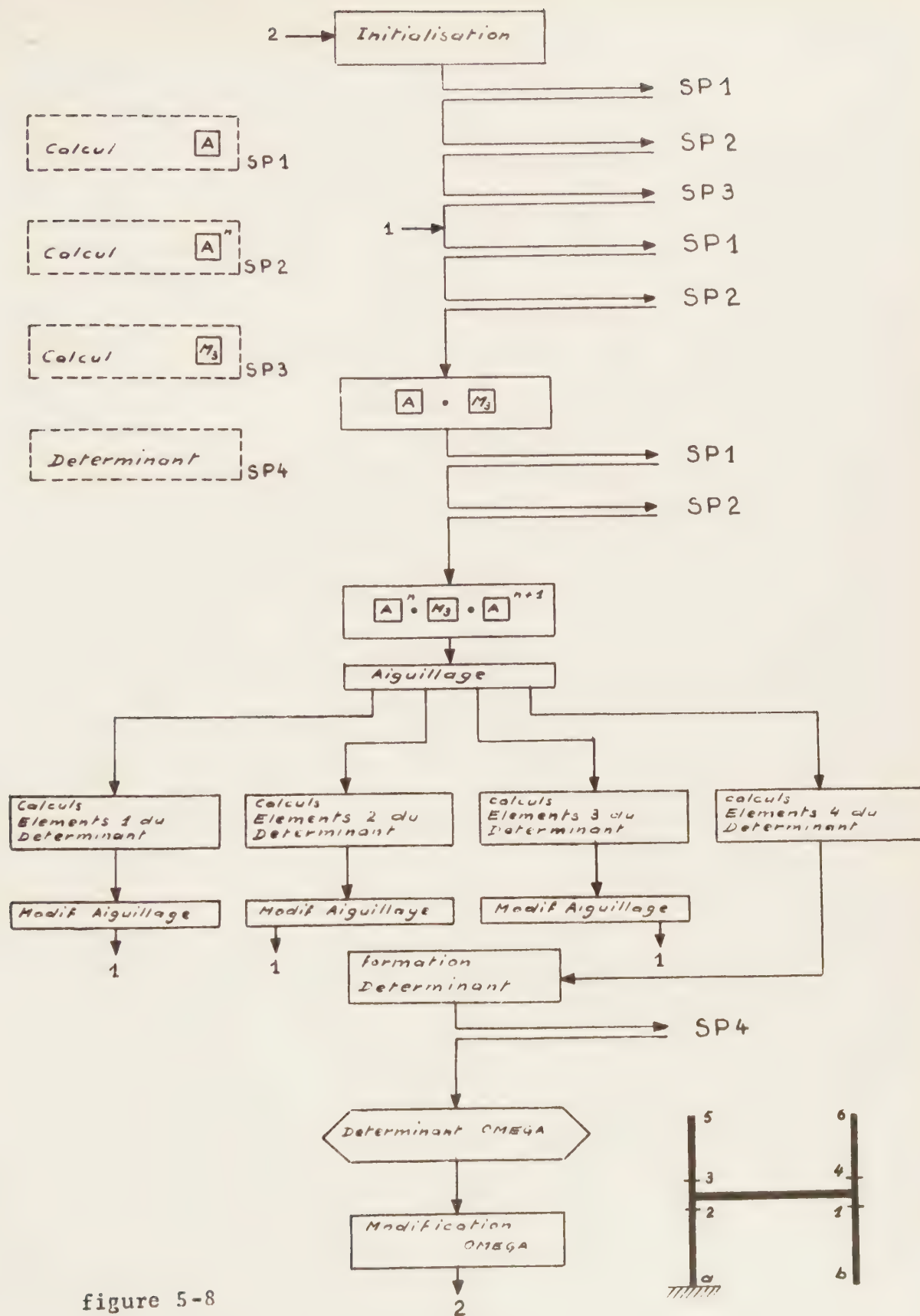


figure 5-8

ANNEXE

METHODES DE CALCUL DES PULSATIONS NATURELLES

Nous ne précisons ici que la méthode de Holzer-Myklestad déjà signalée dans notre avant-propos et celle des matrices de forces et de déplacements.

I - METHODE DE HOLZER-MYKLESTADT (2-3)

Utilisons la forme matricielle plus commode du point de vue de la mise en oeuvre des calculs (20). Nous ne présenterons que la méthode de calcul relatif au mouvement de flexion sans effet secondaire.

Un élément est représenté par la figure ci-contre où la partie (1) tient compte des caractéristiques élastiques du matériau et la partie (2) des caractéristiques massiques.

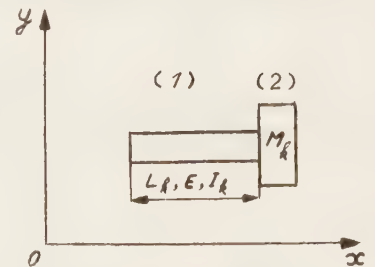


figure 1

A partir des relations 1-14, 1-15, 1-16, 1-17, on effectue un développement limite de $T C \Psi Y$ et on obtient deux matrices de transfert A_{1k} et A_{2k} correspondant à (1) et (2) dont les expressions sont :

$$A_{1k} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_k & 1 & 0 & 0 \\ \frac{L_k^2}{2EI_k} & \frac{L_k}{EI_k} & 1 & 0 \\ \frac{L_k^3}{6EI_k} & \frac{L_k^2}{2EI_k} & L_k & 1 \end{vmatrix} \quad A_{2k} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & M_k \omega^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Ce qui permet de calculer la matrice de transfert de l'ensemble.

$$\boxed{A_k} = \boxed{A_2k} \cdot \boxed{A_1k} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{M_k \cdot \omega^2 \cdot L_k^3}{6EI_k} & \frac{M_k \cdot \omega^2 \cdot L_k^2}{2EI_k} & M_k \cdot L_k \cdot \omega^2 & M_k \cdot \omega^2 \\ L_k & 1 & 0 & 0 \\ \frac{L_k^2}{2EI_k} & \frac{L_k}{EI_k} & 1 & 0 \\ \frac{L_k^3}{6EI_k} & \frac{L_k^2}{2EI_k} & L_k & 1 \end{vmatrix}$$

De nombreux auteurs ont modifié cette méthode (21-22) afin d'améliorer la précision des calculs. Il semble que le procédé conduisant à la meilleure précision soit celui de Huang (22) qui, avec 20 matrices conduit à un écart de 0,15 %. Il faut cependant admettre que cet avantage se paye par l'inconvénient d'une mise en oeuvre délicate.

II - METHODE DES MATRICES DE FORCES ET DE DEPLACEMENTS

(23, ch I - II)

Nous allons la présenter dans le cas que nous avons étudié, c'est-à-dire un milieu continu à masse répartie en coordonnées distribuées.

Désignons par :

p , coordonnées liées auxquelles correspond la force P
 q , coordonnées généralisées auxquelles correspond la force Q
 $|\beta|$ la matrice déduite des conditions de liaisons telles que $|p| = |\beta| |q|$
 $\boxed{K}$ la matrice de raideur généralisée telle que $[Q] = \boxed{K} [q]$
 $\boxed{M}$ la matrice de masse généralisée telle que l'énergie cinétique, soit :

$$T = \frac{1}{2} [\dot{q}]^T \boxed{M} [\dot{q}]$$

Le travail virtuel étant un invariant, on a :

$$|Q|^T |q| = |P|^T |p| = |P|^T |\beta| |q|$$

$$[Q] = [\beta]^T [P]$$

Pour le $i^{\text{ème}}$ élément de la structure, on a :

$$[p_i] = [k_i] [p_i]$$

d'où pour l'ensemble de la structure

$$[P] = [k] [p]$$

Alors

$$[Q] = [K] [q] = [\beta]^T [P] = [\beta]^T [k] [p] = [\beta]^T [k] [\beta] [q]$$

d'où

$$[K] = [\beta]^T [k] [\beta]$$

Le calcul des $[k_i]$ pour un élément peut s'effectuer à partir du théorème de Costigliano. Dans le cas d'une verge en flexion auquel nous nous sommes intéressés, précisons la façon de calculer les termes de $[k_i]$. La déflexion est :

$$y(x) = \sum \phi_j(x) \cdot p_j$$

puisque

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) (y''(x))^2 dx$$

On a :

$$P_i = \frac{\partial U}{\partial p_i} = \sum k_{ij} p_j$$

donc

$$k_{ij} = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \phi_i''(x) \phi_j''(x) dx$$

Il est à noter qu'on peut appliquer le théorème de Costigliano, car pour la verge isolée les p sont indépendants.

Il reste alors à calculer $[M]$. Nous n'allons effectuer le calcul que pour l'énergie cinétique due à la flexion

$$y(x) = \sum \phi_j(x) p_j$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho S(x) [\dot{y}(x)]^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) \left(\sum_i \sum_j \phi_i(x) \cdot \phi_j(x) \dot{p}_i \dot{p}_j \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{p}_i \dot{p}_j \int_0^L \rho S(x) \cdot \phi_i(x) \cdot \phi_j(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j m_{ij} \dot{p}_i \dot{p}_j = \frac{1}{2} [\dot{p}]^T [m_{ij}] [\dot{p}]$$

$$\text{avec } m_{ij} = \int_0^L \rho S(x) \phi_i(x) \phi_j(x) dx$$

$$\text{Or } [p] = [\beta] [q]$$

d'où

$$T = \frac{1}{2} [\dot{q}]^T [M] [\dot{q}] \quad \text{Avec } [M] = [\beta]^T [m_{ij}] [\beta]$$

Les valeurs propres de $[K]^{-1} [M]$ seront égales à $\frac{1}{\omega_1^2}, \dots$
 $\omega_1, \dots$, pulsations naturelles.

CONCLUSION

Le dépouillement bibliographique nous a montré que la méthode des matrices de forces et de déplacements conduisait à d'excellents résultats pour la détermination des pulsations naturelles mais devenait alors difficiles à appliquer. On peut remarquer qu'il apparaît l'inconvénient de ne pas déterminer les éléments de réduction (effort tranchant, moment fléchissant..) qui interviennent dans de nombreux critères de rupture. Cette remarque est aussi à l'origine du choix que nous avons fait pour la direction de nos recherches.

Il est bien évident que les recherches qui ont été exposées dans notre travail font appel à des matrices relativement complexes, mais l'expérience nous a montré qu'elles se prêtaient fort bien au calcul automatique, que leur mise en oeuvre était en définitive très simple et qu'on obtenait un bon accord entre la théorie et l'expérience.

Il serait intéressant de déterminer à partir des matrices de transfert, une méthode de calcul de treillis complexes, mais cela nécessiterait alors un ordinateur beaucoup plus puissant qu'un IBM 1130.

Puissent ces recherches être utiles à d'autres expérimentateurs dans leurs efforts pour une meilleure connaissance des propriétés dynamiques des milieux continus qui sont de plus en plus à l'ordre du jour.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) HOLZER, Die Berechnung der Drehschwingungen (1921)
- (2) MYKLESTADT, Trans. ASME, 67, (1945), 61
- (3) BARROIS, Publications scientifiques et techniques, 261, (1950)
- (4) TREFFTZ, Z. Angew. Math. U. Mech. n 15, (1935), 220
- (5) TIMOSHENKO, Théorie de l'élasticité, (1951), 358
- (6) ROCARD, l'Instabilité en mécanique, (1954), 208
- (7) HUANG, KUNG, Developments in theoretical and applied mechanics, 1, (1963), 59
- (8) TIMOSHENKO, Phil Mag Ser 6, 41 (1921), 744
- (9) TIMOSHENKO, Phil Mag Ser 6, 43 (1922), 125
- (10) TRAIL-NASH, Mech. and Applied Math., 6, (1953), 186
- (11) FUNG, The Theory of Aeroelasticity, (1955), 473
- (12) LALANNE, Comptes rendus, 260, (1965), 1075
- (13) LALANNE, Comptes rendus, 261, (1965), 1795
- (14) GALLAGER, RATTINGER, ARCHER, A correlation study of method of matrix structural analysis. AGARD 69, (1964)
- (15) ARGYRIS, matrix methods of structural analysis, AGARD 72, (1964)
- (16) PESTEL, LECKIE, matrix methods in Elastomechanics Mc Graw Hill, (1963), p. 153
- (17) PESTEL, LECKIE, " " " " " " p. 151
- (18) MARGUERRE, WOERNLE, Revue Française mécanique, (1965) 3ème Tr., p. 75
- (19) GLADWELL, Revue Française de mécanique, (1965), 3ème Tr. p. 51
- (20) TARGOFF, Journal of the Aeronautical Science, oct, (1947)
- (21) THOMSON, Journal of Applied Mechanics, mars (1950), 337
- (22) HUANG, Developments in mechanics, 1, (1961), 73
- (23) HURTY, RUBINSTEIN, Dynamics of structures, Prentice-Hall (1964)

TABLE DES MATIERES

AVANT PROPOS	1
DEFINITIONS GENERALES ET HYPOTHESES DE REFERENCE	2
<u>Chapitre 1</u>	
CONTRIBUTION A L'ETUDE DES VERGES PRISMATIQUES	6
I - Etude mathématique de la torsion	7
II - Etude mathématique de la flexion	9
1) Absence d'effets secondaires	10
2) Intervention des effets secondaires	13
III - Etude mathématique de la flexion-torsion	21
IV - Coefficients d'influence en flexion	29
<u>Chapitre 2</u>	
DETERMINATION DES PULSATIONS NATURELLES DE FLEXION	35
I - Détermination d'une matrice de transfert pour la flexion sans effets secondaires	36
II - Détermination d'une matrice de transfert étendue aux effets secondaires	40
III - Détermination d'une matrice de transfert liée à l'existence d'un champ centrifuge	44
IV - Pulsations naturelles	48
V - Evaluation de l'incertitude propre à notre méthode	49
1) Cas de la flexion sans effets secondaires	49
2) Cas de la flexion avec effets secondaires	53
VI - Exemple d'extension des calculs	57
<u>Chapitre 3</u>	
DETERMINATION DES PULSATIONS NATURELLES DE FLEXION-TORSION	59
I - Détermination d'une matrice de transfert en flexion torsion	60
II - Calculs des pulsations naturelles	66
III - Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux	67
<u>Chapitre 4</u>	
APPLICATION DES MATRICES DE TRANSFERT A L'ETUDE DES TREILLIS	69
I - Détermination d'une matrice de transfert d'un élément	69

II	- Détermination des matrices de transfert M_1, M_2, M_3	72
	1) Matrice de transfert M_1	72
	2) Matrice de transfert M_2	73
	3) Matrice de transfert M_3	77
	4) Extension des résultats précédents	81
III	- Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux	82
IV	- Application de la méthode des matrices de forces et de déplacements	88
	1) Exemple n° 1	88
	2) Exemple n° 2	92
V	- Comparaison entre la méthode des matrices de transfert et celle des matrices de forces et de déplacements	

chapitre 5

ASPECT EXPERIMENTAL ET PROCEDES DE CALCUL	98
I - Détermination des paramètres géométriques et mécaniques	99
II - Détermination des pulsations naturelles	99
III - Détermination des pulsations naturelles de flexion avec effet centrifuge	100
IV - Procédés de calcul	104

Annexe

METHODE DE CALCUL DES PULSATIONS NATURELLES	109
I - Méthode de Holzer-Myklestad	109
II - Méthode des matrices de forces et de déplacements	110

<u>Conclusion</u>	113
-------------------	-----

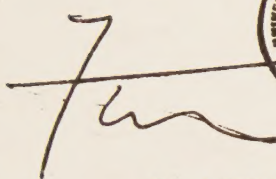
<u>bibliographie</u>	114
----------------------	-----

Nom de l'Etudiant : Michel LALANNE
Nature de la Thèse : Doctorat ès-Sciences
Titre de la Thèse : Contribution au calcul des pulsations naturelles
des milieux continus unidimensionnels.
Application aux treillis.

Vu et approuvé

Nancy le 26 Avril 1967

LE DOYEN :

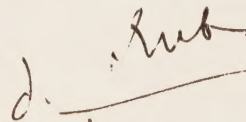


J. AUBRY

Vu et Permis d'imprimer

Nancy le 28 Avril 1967

LE RECTEUR, Président du
Conseil de l' Université



P. IMBS

